

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA E COMPUTACIÓN



TESIS DOCTORAL

MODELOS DE CUANTIFICACIÓN BORROSA  
BASADOS EN UNA INTERPRETACIÓN  
PROBABILÍSTICA Y SU APLICACIÓN EN  
RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN

**Presentada por:**

Félix Díaz Hermida

**Dirigida por:**

Dr. Alberto J. Bugarín Diz

Dr. David E. Losada Carril

Santiago de Compostela, Mayo 2006



**ALBERTO J. BUGARÍN DIZ**

Profesor Titular de Universidad del Área de  
Ciencia de la Computación e Inteligencia  
Artificial de la Universidad de Santiago  
de Compostela

**DAVID E. LOSADA CARRIL**

Investigador contratado Ramón y Cajal de la  
Universidad de Santiago de Compostela

**HACEN CONSTAR:**

Que la memoria titulada “**Modelos de cuantificación borrosa basados en una interpretación probabilística y su aplicación en recuperación de información**” ha sido realizada por **D. Félix Díaz Hermida** bajo nuestra dirección en el Departamento de Electrónica y Computación de la Universidad de Santiago de Compostela, y constituye la Tesis que presenta para optar al grado de Doctor por la Universidad de Santiago de Compostela (programa de doctorado Electrónica e Informática del Departamento de Electrónica y Computación).

Santiago de Compostela, 12 de mayo de 2006

Fdo.: Alberto José Bugarín Diz  
Codirector de la Tesis

Fdo.: David Enrique Losada Carril  
Codirector de la Tesis

Fdo.: Diego Cabello Ferrer  
Director del Departamento de  
Electrónica y Computación

Fdo.: Félix Díaz Hermida  
Autor de la tesis



*“El pensamiento es una chispa entre dos largas  
noches, pero ese destello lo es todo.”*

Henri Poincaré.



**GRACIAS.** Me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a los directores de este trabajo, los profesores Alberto José Bugarín Diz y David Enrique Losada Carril, por la confianza y ayuda que me han brindado a lo largo de estos años, sin las cuales la presente investigación no hubiera sido posible. También me gustaría expresar mi sincero agradecimiento a Prof. D. Senén Barro Ameneiro por haberme dado la oportunidad de iniciar mi carrera investigadora dentro del Departamento de Electrónica, y la atención prestada durante la primera etapa del presente trabajo.

Agradezco también el apoyo de mis compañeros del Grupo de Sistemas Inteligentes del Departamento de Electrónica y Computación, por su actitud colaboradora y por los buenos ratos pasados. Recuerdo especialmente los buenos momentos que he pasado con mis compañeros de despacho Juan Carlos, Molina, Dinani, Daniel y Carlos.

También me gustaría agradecer el apoyo recibido de mi novia, Bibiana, de mis padres, Santiago y Marta, y de mi hermano Santiago, que han sabido soportarme a lo largo de los años que he dedicado a la realización de esta investigación. Y a mis amigos, especialmente Javier y Diego, que han sobrellevado con estoicismo más de una explicación sobre el tema.

Para finalizar, me gustaría agradecer el apoyo económico recibido para desarrollar esta investigación. Agradezco el soporte económico recibido de la CICYT a través del proyecto “Integración mediante tecnología web de la adquisición, tratamiento y presentación inteligentes de la información técnica en centrales térmicas” (CICYT 1FD97-0183); el recibido de la Universidad de Santiago de Compostela a través del proyecto “Sistema de planificación dinámica de la carga de trabajo de la fabricación en la industria del mueble” (Ref. 2004/CG523); de la Xunta de Galicia a través de los proyectos “Entorno docente colaborativo basado en PDAs: del modelo de conocimiento a la síntesis” (PGIDIT02TIC206001PR) y “Minería de datos en polisomnografías de pacientes con alteraciones cardiopulmonares del sueño” (PGIDIT04SIN206003PR), y de la beca predoctoral que ha sustentado una gran parte de esta investigación; y del Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto “Recuperación de sentencias relevantes y noveles usando modelos y técnicas de recuperación de información ” (TIN2005-08521-C02-01).



# Prefacio

En esta memoria vamos a plantear algunos modelos de cuantificación borrosa basados en una interpretación probabilística de los conjuntos borrosos. También plantearemos una clasificación y análisis profundo de cuantificadores borrosos que amplía en gran medida la dicotomía absoluto/relativa de Zadeh. En el ámbito más aplicado, mostramos como se puede utilizar la cuantificación borrosa para mejorar la potencia expresiva de los lenguajes de consulta de recuperación de información. En este sentido, no nos hemos limitado a la realización de una nueva propuesta teórica, sino que hemos contrastado el rendimiento de la misma en la tarea de recuperación de información básica (recuperación de texto en bases documentales) con muy buenos resultados.

El manejo de información cuantificada es constante en nuestro quehacer cotidiano y constituye un pilar fundamental en la representación del conocimiento y el razonamiento. Ya sea de una manera explícita o implícita, emitimos continuamente juicios en los cuales la cuantificación está presente (e.g. *“la mayoría de los trabajadores son de mediana edad”*, *“la participación femenina es de alrededor del 60 %”* o *“la situación económica es preocupante”*<sup>1</sup>). La cuantificación nos permite adaptar la información que manejamos a un nivel de complejidad adecuado para su consumo.

En los ejemplos anteriores podemos ver dos elementos diferenciados. Por un lado los cuantificadores (e.g., *“la mayoría”* o *“alrededor del 60 %”*) y por otro las propiedades a las cuales se aplican (e.g., *“trabajadores”*, *“individuos de mediana edad”*, etc.). Otra característica muy importante de estos ejemplos es la presencia de vaguedad tanto en los cuantificadores (e.g., en *“alrededor del 60 %”* los límites del cuantificador no se expresan de manera precisa sino vaga) como en las propiedades

---

<sup>1</sup>En este último ejemplo, podemos considerar que la *“situación preocupante”* de la economía se debe a la conjunción de diversos factores negativos. De ahí que podamos entender este ejemplo como un caso de cuantificación implícita *“muchos factores económicos son negativos”*.

(e.g., “*ser de mediana edad*”). En general, se conoce como *cuantificación borrosa* [103] el problema del modelado de la cuantificación del lenguaje cuando la vaguedad está presente.

Dada la frecuente presencia de la cuantificación en el lenguaje, la realización de este modelado es de sumo interés para emular el procesamiento de información humano, lo cual, como no es de extrañar, tiene aplicaciones en diversos campos relacionados con la inteligencia artificial. Desde el punto de vista de la representación del conocimiento, la cuantificación borrosa nos permite representar la información del dominio de una “manera gruesa”. Por ejemplo, la decisión de si una determinada expresión cuantificada se adapta al conocimiento disponible nos permite resumir un conjunto de datos que en principio puede ser muy amplio (“*alrededor del 80 % de los diputados votaron a favor*”). Desde el punto de vista del razonamiento el modelado de la cuantificación nos permite aumentar la expresividad de los sistemas de inferencia y la definición de condiciones de decisión más elaboradas. En este caso la cuantificación borrosa nos permite definir condiciones menos restrictivas sobre el cumplimiento de las premisas de las reglas de inferencia. Por ejemplo, podemos flexibilizar el cumplimiento de las premisas diciendo que es suficiente con que se cumplan alrededor del 80 % de éstas en vez de la cláusula conjuntiva habitual. Veremos que la cuantificación borrosa también es de mucha utilidad para la creación de rankings automáticos. Para este problema la cuantificación nos permite tanto la asignación de importancias a los criterios que deben determinar la ordenación, como el establecimiento de la cantidad de criterios a ser cumplidos (e.g. “*al menos el 50 %*”).

Se puede considerar que es el trabajo de Zadeh [103] el que inicia la investigación en cuantificación borrosa como un ámbito de interés propio. En este trabajo Zadeh introduce la aproximación básica a la cuantificación borrosa; diferenciando entre *cuantificadores de primera clase* o cuantificadores que nos permiten representar cantidades absolutas (e.g. “*más de 3*”), y *cuantificadores de segunda clase* o cuantificadores que nos permiten representar cantidades proporcionales (“*alrededor del 60 %*”). Además, Zadeh plantea la representación de cuantificadores a través de números borrosos; y propone la evaluación de sentencias cuantificadas mediante la comparación de los números borrosos utilizados para representar los cuantificadores y medidas de cardinalidad borrosa de los conjuntos borrosos a los que se refiere la cuantificación. Así, la decisión de la validez del enunciado “*la mayoría de los trabajadores son de mediana edad*” se reduce, según Zadeh, a comparar el número borroso

utilizado para representar “la mayoría” con una medida de cardinalidad borrosa calculada a partir del conjunto borroso que representa la propiedad “*ser de mediana edad*”.

Aunque interesante como aproximación inicial, el planteamiento de Zadeh es limitado. Veremos en esta memoria que el marco de Zadeh está lejos de poder manejar el fenómeno de la cuantificación en el lenguaje natural, que es en realidad mucho más amplio que las dos situaciones (absoluto/proporcional) consideradas por Zadeh. Además, el tratamiento matemático de la cuantificación realizado en el marco de Zadeh también es limitado, y dificulta tanto el estudio de las relaciones entre los tipos de cuantificadores como el análisis de la validez de las aproximaciones a la cuantificación borrosa.

Por esta razón en esta memoria vamos a seguir la aproximación a la cuantificación borrosa planteada por Glöckner [41, 45, 47, 50]. En sus trabajos, Glöckner advierte la racionalidad y la madurez del tratamiento de la cuantificación clásica realizado en la teoría lingüística de *los cuantificadores generalizados* [5, 6, 57] y decide replantear la cuantificación borrosa de manera coherente con dicha teoría. En su aproximación, el autor generaliza el concepto de *cuantificador generalizado clásico* (predicados de segundo orden o relaciones entre conjuntos) al caso borroso (relaciones borrosas entre conjuntos borrosos). Además, también plantea mecanismos para especificar, de una manera sencilla, la semántica de los cuantificadores presentes en el lenguaje, así como mecanismos para la construcción de cuantificadores borrosos a partir de estas “especificaciones”. Veremos que el marco de trabajo planteado por este autor es mucho más completo que el marco de trabajo planteado por Zadeh. Permite el tratamiento de los cuantificadores que quedan fuera del marco de Zadeh y la realización de un análisis riguroso de las distintas aproximaciones a la cuantificación borrosa.

En esta memoria vamos a seguir este planteamiento para intentar ofrecer nueva luz al campo de la cuantificación borrosa. Describimos a continuación la organización de la tesis.

En el primer capítulo introducimos el problema de la cuantificación borrosa, realizando una breve exposición del marco tradicional de Zadeh y de la aproximación a la cuantificación planteada en la teoría lingüística de los cuantificadores generalizados. Posteriormente explicamos como Glöckner combina las ideas de los dos enfoques anteriores para establecer un nuevo marco para la cuantificación borrosa. Además,

también presentamos un conjunto de propiedades que nos permiten evaluar la adecuación de las aproximaciones a la cuantificación borrosa<sup>2</sup>. Para finalizar este primer capítulo, realizamos una revisión de las distintas aproximaciones a la cuantificación borrosa planteadas en la bibliografía.

En el capítulo dos introducimos la interpretación probabilística de los conjuntos borrosos que hemos utilizado para definir los modelos de cuantificación propuestos en esta memoria. En vez de plantear estos modelos de una manera abstracta, hemos preferido definirlos apoyándonos en la interpretación de los conjuntos borrosos subyacente a los mismos.

En el capítulo tres definimos los modelos de cuantificación mencionados<sup>3</sup>, relacionando estas definiciones con las interpretaciones de los conjuntos borrosos explicadas en el capítulo dos. También realizamos un análisis profundo del comportamiento de estos. El análisis de propiedades demuestra que estos modelos son una aportación importante al campo de la cuantificación borrosa. También mostramos algunas aplicaciones muy interesantes de la interpretación probabilística de estos modelos.

En el capítulo cuatro definimos un amplio conjunto de cuantificadores de interés indudable para las aplicaciones, el cual supera ampliamente la dicotomía absoluto/proporcional de Zadeh. En este capítulo también explicamos como se pueden evaluar expresiones con cuantificación anidada (e.g., “*al menos del 30 % de los estudiantes le gustan la mayoría de las asignaturas de ciencias*”). Finalizamos el capítulo con una breve exposición de la utilización de cuantificadores borrosos para el manejo de expresiones temporales.

En el capítulo cinco contrastamos, mediante experimentación a gran escala<sup>4</sup>, el rendimiento de la cuantificación borrosa en la tarea de recuperación de información básica. Destacamos ya que la aproximación que hemos seguido ha demostrado ser competitiva contra el estado del arte en recuperación de información.

El capítulo seis, dedicado a las conclusiones de esta memoria, resume las aportaciones más importantes de este trabajo y menciona algunos de los puntos abiertos

---

<sup>2</sup>La mayoría de las propiedades que se presentan han sido propuestas en [45, 47].

<sup>3</sup>Uno de los modelos que vamos a presentar es una adaptación del modelo definido en [21] por Delgado et al. al marco de trabajo planteado por Glöckner. Aconsejamos al lector consultar el apartado de revisión bibliográfica y el capítulo tres para más información.

<sup>4</sup>Concretamente, en la experimentación hemos utilizado el corpus basado en el *Wall Street Journal* (WSJ) de la colección TREC [54], que contiene alrededor de 173.000 artículos de noticias que abarcan un periodo de unos seis años, y 50 consultas del TREC-3.

más importantes sobre los que no hemos podido profundizar en el desarrollo de ésta.

Además, en la memoria hemos incluido dos apéndices. En el primer apéndice desarrollamos las demostraciones de las propiedades de los modelos de cuantificación. En el segundo apéndice planteamos soluciones algorítmicas eficientes para algunos de los cuantificadores más interesantes.

Para finalizar, nos gustaría destacar que una parte importante de los resultados que se presentan en esta memoria han tenido su reflejo en cierto número de publicaciones.

Nuestra propuesta inicial para la evaluación de sentencias cuantificadas borrosas [25] fue presentada en el *ESTYLF* en el año 2000 (*X Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*). Una versión extendida de este trabajo fue publicada en la revista *Mathware and Soft Computing* [33].

En el trabajo [29], publicado en la revista *Fuzzy Sets and Systems*, presentamos un marco probabilístico basado en conjuntos aleatorios para la definición de cuantificadores borrosos. Una versión preliminar de este trabajo [26] fue presentada en el *EUSFLAT* (*European Society for Fuzzy Logic and Technology*) del año 2001.

La clasificación de cuantificadores que se plantea en el capítulo cuatro es una ampliación del trabajo [24], publicado en la revista *International Journal of Approximate Reasoning*.

La aplicación de cuantificación borrosa en el campo de recuperación de información ha dado lugar a varios trabajos. La propuesta inicial [67] fue presentada en el *SAC* (*ACM Symposium on Applied Computing*) en el año 2004. El trabajo [34], presentado en el *IPMU* (*International Conference on Information, Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*) en el año 2004, incluye por primera vez uno de los modelos de cuantificación borrosa que definimos en esta memoria, y analiza el rendimiento de este nuevo modelo en recuperación de información. El trabajo [68], publicado como capítulo de libro en la serie *Springer-Verlag*, amplía los resultados de [67] al considerar conjuntamente la utilización de cuantificación borrosa y de técnicas de normalización por longitud [82]. Por su parte, el trabajo [35], publicado en la revista *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* amplía los resultados de [34], presentando nuevos resultados teóricos y experimentales.

Por otra parte, en [4] hemos planteado un análisis crítico de algunas de las aproximaciones a la cuantificación borrosa más relevantes. Este trabajo ha sido

una fuente muy importante para la revisión bibliográfica que planteamos en esta memoria.

Nos parece relevante también la colaboración en los trabajos [17,18], que versan sobre el tratamiento de *expresiones temporales borrosas*. La cuantificación borrosa es de mucho interés para el modelado de la semántica de algunas expresiones temporales (e.g. “*la mayoría de las temperaturas en junio fueron altas*”). También nos parece relevante destacar la colaboración en el trabajo [31] que analiza la utilización de cuantificación borrosa en diversas aplicaciones prácticas.

Nos gustaría destacar también otros trabajos que guardan cierta relación con el desarrollo de esta memoria pero que no han sido incluidos en la misma. En el trabajo [32], presentado en el *FUZZ-IEEE (IEEE International Conference on Fuzzy Systems)*, estudiamos la aplicación de diversas interpretaciones de los conjuntos borrosos para la extensión de funciones sobre conjuntos a conjuntos borrosos (por ejemplo medias). Este trabajo ha sido ampliado por invitación en [28], capítulo de libro perteneciente a una colección de la serie *Springer-Verlag*.

Por su parte, el trabajo [27], presentado en el ESTYLF en el año 2002, trata un nuevo enfoque para la evaluación de expresiones cuantificadas borrosas. Aunque este trabajo guarda mucha relación con el de esta memoria, hemos preferido no incluir las ideas propuestas en el mismo en el desarrollo de esta tesis, ya que dicho trabajo constituye una propuesta preliminar de un enfoque que intentaremos abordar en el futuro.

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El marco tradicional de Zadeh . . . . .	9
1.2. La cuantificación en el lenguaje natural . . . . .	16
1.3. El marco de trabajo basado en mecanismos de borrosificación de cuantificadores . . . . .	24
1.3.1. De cuantificadores borrosos a cuantificadores semi-borrosos . . . . .	24
1.3.2. Mecanismos de borrosificación de cuantificadores . . . . .	30
1.4. Propiedades de los QFMs . . . . .	34
1.4.1. Propiedades derivadas del marco de los DFSs . . . . .	36
1.4.2. Propiedades adicionales no derivadas del marco axiomático de los DFSs . . . . .	64
1.5. Análisis de las aproximaciones a la cuantificación borrosa . . . . .	77
1.5.1. Modelo de Zadeh basado en $\sum$ count . . . . .	81
1.5.2. Modelo de Yager basado en OWA . . . . .	85
1.5.3. Cuantificación basada en la medida FG-Count . . . . .	92
1.5.4. Aproximación basada en la cardinalidad Z de Zadeh de Delgado et al. . . . .	95

1.5.5.	Cuantificación basada en la medida <i>FE-Count</i> y generalización de Delgado et al. . . . . .	100
1.5.6.	Modelo GD de Delgado et. al. . . . . .	105
1.5.7.	Propuestas de Glöckner basadas en cortes trivaluados . . . . .	109
1.5.8.	Otras aproximaciones a la cuantificación borrosa. . . . . .	116
<b>2.</b>	<b>Interpretaciones probabilísticas de los conjuntos borrosos</b>	<b>121</b>
2.1.	Interpretación de los grados de pertenencia . . . . .	123
2.2.	Interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes . . . . .	127
2.3.	Interpretación de los conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios	133
2.3.1.	Perfiles de decisión . . . . .	139
<b>3.</b>	<b>QFM's probabilísticos para la cuantificación borrosa</b>	<b>143</b>
3.1.	QFM basado en verosimilitudes . . . . .	143
3.2.	QFM's basados en conjuntos aleatorios . . . . .	146
3.2.1.	QFM basado en conjuntos aleatorios de máxima dependencia	147
3.2.2.	QFM basado en conjuntos aleatorios de independencia . . . . .	150
3.2.3.	Otras posibilidades para definir QFM's basados en conjuntos aleatorios . . . . .	151
3.3.	Análisis de los QFM's $\mathcal{F}^A$ , $\mathcal{F}^{MD}$ y $\mathcal{F}^I$ . . . . .	152
3.3.1.	Análisis del QFM $\mathcal{F}^A$ . . . . .	152
3.3.2.	Análisis de los QFM's $\mathcal{F}^{MD}$ y $\mathcal{F}^I$ . . . . .	157
3.4.	Tratamiento alternativo de las situaciones de indeterminación . . . . .	161
<b>4.</b>	<b>Clasificación de cuantificadores semi-borrosos</b>	<b>167</b>
4.1.	Cuantificadores estándar . . . . .	169
4.2.	Cuantificadores semi-borrosos unarios . . . . .	170
4.3.	Cuantificadores semi-borrosos binarios . . . . .	173

4.3.1.	Cuantificadores semi-borrosos binarios conservativos . . . . .	174
4.3.2.	Cuantificadores semi-borrosos binarios comparativos . . . . .	179
4.3.3.	Cuantificadores semi-borrosos de similaridad . . . . .	180
4.3.4.	Cuantificadores semi-borrosos de importancia relativa en la unión . . . . .	184
4.3.5.	Expresión general de los cuantificadores semi-borrosos binarios	184
4.4.	Cuantificadores semi-borrosos ternarios . . . . .	185
4.4.1.	Cuantificadores semi-borrosos ternarios comparativos . . . . .	186
4.4.2.	Cuantificador semi-borroso ternario de excepción . . . . .	191
4.5.	Cuantificadores semi-borrosos cuaternarios . . . . .	192
4.6.	Sentencias con cuantificación anidada . . . . .	193
4.7.	Aplicación de la clasificación de cuantificadores en el dominio temporal	199
4.7.1.	Cuantificación proporcional en el dominio temporal . . . . .	200
4.7.2.	Cuantificación comparativa en el dominio temporal . . . . .	202
4.7.3.	Cuantificadores de similaridad en el dominio temporal . . . . .	203
4.8.	Algunos casos no considerados en la clasificación . . . . .	204
<b>5.</b>	<b>Cuantificación borrosa en recuperación de información</b>	<b>209</b>
5.1.	Motivación . . . . .	210
5.2.	Funcionamiento básico de los sistemas de recuperación de información	213
5.2.1.	Evaluación en recuperación de la información . . . . .	216
5.3.	Revisión de algunos modelos de IR . . . . .	219
5.3.1.	Modelo booleano . . . . .	220
5.3.2.	Modelo vectorial . . . . .	221
5.3.3.	Modelo booleano extendido . . . . .	224
5.3.4.	Modelo borroso . . . . .	227

5.3.5.	Modelo p-norm . . . . .	228
5.4.	Utilización de cuantificación borrosa para extender el modelo borroso	231
5.4.1.	Visión borrosa de los documentos . . . . .	232
5.4.2.	Sintaxis del lenguaje de consultas . . . . .	233
5.4.3.	Semántica del lenguaje de consultas . . . . .	236
5.5.	Experimentación contra las bases de datos del TREC . . . . .	239
5.5.1.	Experimentación con cuantificación unaria y una única cláusula cuantificada . . . . .	242
5.5.2.	Experimentación con cuantificación unaria y varias cláusulas cuantificadas . . . . .	247
5.5.3.	Experimentación con cuantificación binaria . . . . .	250
5.6.	Resumen de los resultados de la experimentación y conclusiones . . .	256
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>259</b>
<b>A.</b>	<b>Análisis de propiedades de los QFMs <math>\mathcal{F}^A</math>, <math>\mathcal{F}^I</math> y <math>\mathcal{F}^{MD}</math></b>	<b>265</b>
A.1.	Modelo $\mathcal{F}^A$ . . . . .	265
A.1.1.	El modelo $\mathcal{F}^A$ es un DFS . . . . .	271
A.1.2.	Propiedades del modelo $\mathcal{F}^A$ no derivadas del marco axiomático de los DFSs . . . . .	292
A.2.	Modelo $\mathcal{F}^{MD}$ . . . . .	303
A.2.1.	Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFS . . .	303
A.2.2.	Propiedades no derivadas del marco axiomático de los DFS . .	318
A.3.	Modelo $\mathcal{F}^I$ . . . . .	323
A.3.1.	Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFS . . .	323
A.3.2.	Propiedades no derivadas del marco axiomático de los DFS . .	334
<b>B.</b>	<b>Algoritmos</b>	<b>341</b>

B.1. Algoritmos para el modelo $\mathcal{F}^A$ . . . . .	341
B.1.1. Cuantificadores estándar . . . . .	341
B.1.2. Cuantificadores cuantitativos unarios . . . . .	342
B.1.3. Cuantificadores binarios cuantitativos conservativos . . . . .	345
B.2. Algoritmos para el modelo $\mathcal{F}^{MD}$ . . . . .	347
B.2.1. Cuantificadores estándar . . . . .	349
B.2.2. Cuantificadores unarios cuantitativos . . . . .	349
B.2.3. Cuantificadores binarios cuantitativos conservativos . . . . .	349
B.3. Algoritmos para el modelo $\mathcal{F}^I$ . . . . .	351
B.3.1. Cuantificadores binarios cuantitativos conservativos . . . . .	351

**Bibliografía**

**357**



# Capítulo 1

## Introducción

La presencia de la cuantificación en el lenguaje es continuo y constituye uno de los pilares de la representación del conocimiento y el razonamiento humano. Cuando emitimos juicios como *“todos los trabajadores son de mediana edad”* o como *“la participación femenina es de alrededor del 60 %”* estamos utilizando la capacidad del lenguaje para resumir los hechos referidos a algo manipulable por el cerebro humano. De esta manera, la cuantificación nos permite reducir la información de una situación compleja a un nivel adecuado para su consumo.

Para el modelado de la cuantificación lingüística, el manejo de la vaguedad o borrosidad del lenguaje es fundamental. En *“todos los trabajadores son de mediana edad”* el predicado *“ser de mediana edad”* es sin duda borroso. En este caso, la propiedad *“ser de mediana edad”* puede ser cumplida en diferente grado dependiendo de la edad de los individuos. De igual manera, en *“la participación femenina es de alrededor del 60 %”* la expresión *“alrededor del 60 %”* establece un juicio borroso acerca de la proporción de participación femenina. Proporciones cercanas al 60 % cumplirán la aserción en un grado alto, mientras que proporciones más alejadas la cumplirán en menor grado.

En muchas ocasiones, la cuantificación aparece en el lenguaje de una manera explícita; esto es, los elementos del lenguaje que soportan la cuantificación (e.g., *“alrededor del 60 %”*, *“la mayoría”*, *“todos menos 3”*, *“más de estos que de aquellos”*, etc.) se refieren explícitamente a los individuos a los cuales se aplica la cuantificación. En otras, la cuantificación aparece de manera implícita (e.g. *“casi siempre”*, *“raramente”*, *“en algún lugar”*, etc.). En este caso la cuantificación no se refiere

directamente a los individuos del universo de discurso, sino a otras nociones como ‘puntos temporales’ o ‘localizaciones espaciales’ [47, sección 1.2.].

Los siguientes ejemplos son sólo una pequeña muestra de la diversidad de expresiones cuantificadas del lenguaje. Nótese la presencia de la vaguedad o borrosidad del lenguaje en todos ellos [41, pág. 1]:

- **Relacionados con una especificación aproximada de la cardinalidad de un conjunto:** “*muchos*”, “*unos pocos*”, “*alrededor de 10*”, “*alrededor de 10 o más*”, etc.
- **Relacionados con la especificación de una proporción de cardinalidades:** “*más de la mitad*”, “*casi todos*”, “*alrededor del 40 por ciento*”, etc.
- **Relacionados con la comparación de cardinalidades:** “*muchos más que en*”, “*algunos más que en*”, etc.
- **Relacionadas con una especificación temporal vaga:** “*frecuentemente*”, “*raramente*”, “*casi siempre*”, “*la mayoría de las veces*”, etc.
- **Relacionadas con una especificación de localidad vaga:** “*en casi todos los sitios*”, “*difícilmente en algún lugar*”, etc.

Dada la presencia de la cuantificación en el lenguaje, su modelado es de sumo interés en múltiples campos relacionados con la inteligencia artificial. Desde el punto de vista de la representación del conocimiento, la cuantificación nos permite representar la información del dominio de una “manera gruesa”. Por ejemplo, podemos estar interesados en decidir si una determinada expresión cuantificada se adapta al conocimiento disponible (e.g., “*la mayoría de los individuos que figuran recogidos en una base de datos son altos*”), o en decidir cuál es la mejor expresión para resumir un conjunto de datos (e.g., cálculo automático de las mejores expresiones cuantificadas para resumir un conjunto de datos). Desde el punto de vista del razonamiento, el modelado de la cuantificación lingüística nos permite aumentar la expresividad de los sistemas de inferencia mediante la definición de condiciones de decisión más elaboradas. En este caso, la cuantificación es útil tanto para la definición de condiciones sobre el dominio (e.g., comprobar si un hecho se cumple en la mayoría de los instantes de tiempo de un intervalo) como para la agregación de condiciones (e.g. si se cumplen más del 80% de las premisas de una regla entonces disparamos

la misma). Más adelante veremos que las aplicaciones prácticas del modelado de expresiones cuantificadas son muy amplias.

Como hemos mencionado anteriormente, para el modelado adecuado de la cuantificación lingüística es necesario tener en cuenta la vaguedad del lenguaje. Denominaremos normalmente *cuantificación borrosa* al problema del modelado de la cuantificación lingüística en presencia de vaguedad, terminología habitual en el ámbito de los conjuntos borrosos.

Fue Zadeh el primero en abordar este problema, cuyo planteamiento resumimos a continuación. En su aproximación Zadeh [103] propone modelar el fenómeno de la cuantificación mediante dos tipos principales de cuantificadores borrosos: los *cuantificadores de primera clase* (e.g, “aproximadamente cinco”) que se utilizan para modelar expresiones en las que aparecen cantidades borrosas absolutas, y los *cuantificadores de segunda clase* (e.g, “aproximadamente el 80 % o más”) que se utilizan para modelar expresiones en las que aparecen cantidades borrosas proporcionales. Zadeh se refiere habitualmente a los cuantificadores del lenguaje como *cuantificadores lingüísticos*.

Además, Zadeh identifica los cuantificadores de primera clase con *números borrosos absolutos* y los cuantificadores de segunda clase con *números borrosos proporcionales*. Así, según Zadeh, “aproximadamente cinco” es un cuantificador lingüístico borroso que se puede representar mediante un número borroso absoluto. Una posible definición de dicho número borroso es:

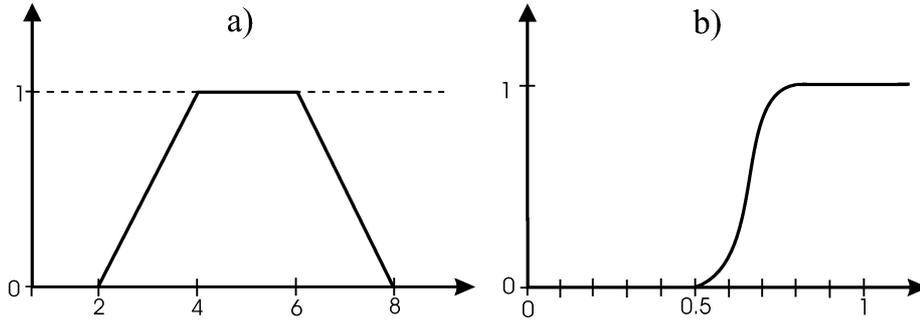
$$\text{aproximadamente}_5(x) = T_{2,4,6,8}(x), x \in \mathbb{R}^+$$

donde  $T_{a,b,c,d}(x) : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$  es un número borroso trapezoidal definido como:

$$T_{a,b,c,d}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & b < x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c} & c < x \leq d \\ 0 & d < x \end{cases}$$

Por su parte, “alrededor del 80 % o más” es un cuantificador lingüístico borroso que se representa mediante un número borroso proporcional. Una posible definición de dicho número borroso es:

$$\text{alrededor\_del\_80\%\_o\_más}(x) = S_{0,5,0,8}(x), x \in [0, 1]$$



**Figura 1.1:** Números borrosos *aproximadamente\_5*( $x$ ) y *alrededor\_del\_80%\_o\_más*( $x$ ).

donde  $S_{\alpha,\gamma}(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es un número borroso definido como<sup>1</sup>:

$$S_{\alpha,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 2 \left( \frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2 & \alpha < x \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ 1 - 2 \left( \frac{x-\gamma}{\gamma-\alpha} \right)^2 & \frac{\alpha+\gamma}{2} < x \leq \gamma \\ 1 & \gamma < x \end{cases}$$

En la figura 1.1 se representan dichos números borrosos. Intuitivamente, el número borroso especificado por  $T_{2,4,6,8}(x)$  es una representación adecuada de “*aproximadamente cinco*” mientras que el número borroso  $S_{0,5,0,8}(x)$  lo es para “*alrededor del 80 % o más*”.

Siguiendo la notación de [41, 45, 47, 50] denotaremos por  $\mathbf{I}$  el universo de grados de verdad  $[0, 1]$ ; esto es,  $\mathbf{I} = [0, 1]$ .

Para Zadeh un modelo de cuantificación es un procedimiento para combinar estos números borrosos con los conjuntos borrosos definidos por las expresiones del lenguaje (e.g. “*ser de mediana edad*”) que resuma la información asociada a los mismos en un grado de verdad (un valor en  $\mathbf{I}$ , como hemos visto). El procedimiento habitual de las aproximaciones que siguen el planteamiento de Zadeh consiste en buscar una medida de cardinalidad borrosa adecuada [22, 36, 69, 78, 90–92] para representar la cardinalidad de los conjuntos borrosos implicados, y combinar luego estas medidas de cardinalidad con los números borrosos que se utilizan para denotar la semántica de los cuantificadores de alguna manera adecuada que nos permita obtener un grado de verdad.

<sup>1</sup>Nótese que el dominio de  $S_{\alpha,\gamma}(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  representa los posibles valores de la proporción mientras que la imagen representa el universo de grados de verdad.

Aunque la aproximación de Zadeh es interesante como enfoque inicial, resulta limitada cuando se examina con ojos críticos. En primer lugar, la capacidad expresiva está muy lejos de poder manejar el fenómeno de la cuantificación en el lenguaje natural. En la sentencia “*hay más trabajadores de mediana edad que trabajadores jóvenes*” no interviene cuantificación absoluta ni proporcional sino comparativa; y existen muchos otros ejemplos que tampoco encajan dentro de la dicotomía absoluto/proporcional de Zadeh. En segundo lugar, la definición de medidas de cardinalidad borrosa es un problema abierto en el que ninguna propuesta se impone claramente a las demás. De esta manera no es fácil decidir como se debe resolver la tarea de combinar los cuantificadores lingüísticos con las medidas de cardinalidad borrosa ni cuales deben ser utilizadas (véase la sección 1.5 para más detalles). Y en tercer lugar y no menos importante, el tratamiento de Zadeh maneja las situaciones absoluto y proporcional de maneras diferenciadas en vez de como situaciones particulares de un esquema más general. Este hecho, que será adecuadamente explicado en el desarrollo de la memoria, dificulta el análisis algebraico de las relaciones entre los distintos tipos de cuantificadores y crea muchas complicaciones a la hora de decidir acerca de la validez de los modelos.

Pese a la cantidad de propuestas que se han planteado siguiendo el marco de Zadeh [12, 13, 19–22, 25, 36, 37, 66, 78, 80, 93–101, 103] y al avance que han supuesto algunas de ellas, podemos decir que hasta los trabajos de Glöckner [41, 45, 47, 50] el campo de la cuantificación borrosa no recibe un impulso formal realmente notable. Tras advertir la racionalidad y madurez del tratamiento de la cuantificación clásica realizado en la *teoría de los cuantificadores generalizados (TGQ)*<sup>2</sup> [5, 6, 56–58], el autor decide plantear el problema de la cuantificación borrosa como una extensión de dicha teoría. Explicaremos antes de proseguir algunos de los conceptos fundamentales de la TGQ.

La TGQ es una teoría desarrollada principalmente a lo largo de las dos últimas décadas que combina las perspectivas lógica y lingüística para analizar el fenómeno de la cuantificación en el lenguaje natural. La TGQ plantea el análisis de la cuantificación del lenguaje a partir de *cuantificadores generalizados*. Un cuantificador generalizado no es más que un predicado de segundo orden, o lo que es lo mismo, una relación entre conjuntos clásicos. Denotemos por  $E$  el conjunto base o conjunto referencial que establece los individuos sobre los que se aplica la cuantificación y por  $\mathcal{P}(E)$  el conjunto de partes de  $E$ . Entonces la semántica del cuantificador “*todos*”

---

<sup>2</sup>En inglés, *theory of generalized quantifiers*.

se puede modelar mediante un predicado de segundo orden  $P^2$  que relaciona todo par de conjuntos  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  tales que  $Y_1 \subseteq Y_2$  (esto es, “*todos los  $Y_1$ s son  $Y_2$ s*” si y sólo si  $P^2(Y_1, Y_2)$ )<sup>3</sup>. De igual manera, la semántica de “*más de la mitad de los  $Y_1$ s son  $Y_2$ s*” se modela mediante un predicado que relaciona todo par de conjuntos  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  tales que  $|Y_1 \cap Y_2| \geq \frac{1}{2} |Y_1|$ . Y para modelar “*hay más  $Y_1$ s que  $Y_2$ s*” utilizamos un predicado tal que  $(Y_1, Y_2) \in P^2$  si y sólo si  $|Y_1| > |Y_2|$ .

Una de las razones por las que surge la TGQ es debido a las limitaciones que presenta la aproximación a la cuantificación planteada en la lógica clásica. Es un hecho conocido que la lógica de primer orden, basada en los cuantificadores existencial ( $\exists$ ) y universal ( $\forall$ ) no es capaz de representar adecuadamente el fenómeno de la cuantificación en el lenguaje natural [5] (por ejemplo, la semántica de la expresión “*más de la mitad de los  $Y_1$ s son  $Y_2$ s*” no se puede representar en lógica de primer orden). Por esta razón, la TGQ plantea el análisis de la cuantificación del lenguaje sobre la base de los cuantificadores generalizados, y sobre esta base analiza la semántica de una variedad muy diversa de elementos del lenguaje en los que interviene la cuantificación. El análisis semántico del lenguaje permite a los lingüistas el estudio de diversos fenómenos relacionados con la cuantificación en el lenguaje.

Aunque en la TGQ se ha realizado un análisis muy profundo de la cuantificación del lenguaje, la TGQ no ha sido desarrollada con vistas al manejo de la vaguedad. Para superar las limitaciones del marco de Zadeh, a la vez que se mantiene la potencia expresiva de la TGQ, Glöckner decide introducir un nuevo marco. Primeramente introduce el concepto de *cuantificadores semi-borrosos*, que son similares a los cuantificadores generalizados clásicos pero con imagen en el universo de grados de verdad  $\mathbf{I}$ . Para aclarar esta idea, digamos que un cuantificador semi-borroso binario permite que dos conjuntos nítidos  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  se relacionen de manera parcial (por ejemplo con grado 0,5). A partir del concepto de cuantificador semi-borroso, Glöckner reescribe el problema de la cuantificación borrosa como la búsqueda de mecanismos que nos permitan convertir los cuantificadores semi-borrosos (que no son capaces de manejar argumentos borrosos) en *cuantificadores borrosos*, que si lo son. Si denotamos por  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  el conjunto de partes borrosas de  $E$  entonces un cuantificador borroso permite asignar un grado de relación parcial (e.g., 0,3) a dos conjuntos borrosos  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

---

<sup>3</sup> “*todos los  $Y_1$ s son  $Y_2$ s*” es una forma general para denotar expresiones en las que aparece el cuantificador “*todos*” (e.g., “*todos los trabajadores son de mediana edad*”). Esta notación se utiliza en [45, 47].

Glöckner denomina a los mecanismos para transformar cuantificadores semi-borrosos en cuantificadores borrosos *mecanismos de borrosificación de cuantificadores* (QFMs)<sup>4</sup>. El marco de trabajo basado en QFMs, que será desarrollado en profundidad a lo largo de este capítulo, tiene dos ventajas fundamentales sobre el planteamiento de Zadeh. Por una parte generaliza la TGQ, y este no es un hecho trivial dada la enorme cantidad de trabajo realizado en el estudio de la cuantificación lingüística desde el punto de vista clásico. Por otra, el planteamiento de Glöckner es general y susceptible de una manipulación algebraica que permite establecer criterios claros para evaluar la calidad de los modelos de cuantificación.

Antes de proseguir, nos parece muy importante destacar la relevancia que tiene el análisis teórico de los modelos de cuantificación borrosa para las aplicaciones. Actualmente existen numerosas propuestas de utilización de cuantificación borrosa en aplicaciones prácticas. Tal como se expone en [47, sección 1.8], muchas de ellas sólo dependen de la existencia de modelos de cuantificación borrosa adecuados. La siguiente es sólo una lista de las más relevantes:

- **Recuperación de información.** La utilización de cuantificación borrosa para el diseño de sistemas de recuperación de información ha sido propuesta en numerosos contextos, que van desde la ampliación de la expresividad de los lenguajes de consulta [9, 10, 34, 35, 67] a su aplicación en sistemas de recuperación de imágenes meteorológicas [45, 47–49]. El trabajo desarrollado en [34, 35, 67] es parte de la memoria de esta tesis. En estos trabajos se demuestra experimentalmente la utilidad de los modelos de cuantificación planteados en esta memoria para aumentar la potencia de los lenguajes de consulta.
- **Bases de datos.** El aumento de la potencia de los lenguajes de consulta también es de interés especial en el ámbito de las bases de datos. En particular, la ampliación del lenguaje SQL con cuantificadores borrosos ha sido planteada en [13, 14].

Los lenguajes de consulta no se benefician únicamente de la definición de modelos de cuantificación de comportamiento plausible, sino también de la posibilidad de manejar un mayor abanico de expresiones cuantificadas, acercando así el lenguaje de consulta al razonamiento lingüístico. En particular, la clasificación de cuantificadores que presentamos en esta memoria (capítulo 4) es de mucha relevancia para este campo.

---

<sup>4</sup>En inglés, *quantifier fuzzification mechanisms*.

- **Control borroso.** En [99] se muestra como se puede utilizar cuantificación borrosa para establecer restricciones sobre el cumplimiento conjunto de una selección de reglas de un sistema de control borroso.
- **Control borroso temporal.** El desarrollo de la cuantificación borrosa es de interés fundamental para la evaluación de expresiones borrosas temporales [15–18]. En [73, 74] se describe como se utilizan este tipo de expresiones para la implementación de comportamientos en robótica móvil.
- **Minería de datos.** La utilización de cuantificación borrosa también ha sido propuesta para la extracción automática de información. Su aplicación para la extracción de *reglas de asociación* se describe en [23, 80]
- **Fusión de datos y toma de decisiones.** Los cuantificadores borrosos también se pueden utilizar para expresar necesidades de agregación de manera lingüística. Con respecto a este punto se pueden consultar las referencias [51, 93].

Y por supuesto, el modelado de la cuantificación borrosa es un pilar básico en el desarrollo de la *computación con palabras* [104]. El desarrollo de modelos de cuantificación borrosa adecuados no es solamente un problema teórico interesante, sino que es de aplicación práctica inmediata. Todas las aplicaciones anteriores se ven beneficiadas tanto de la definición de modelos de mejor comportamiento como del aumento de la expresividad de los lenguajes que se consigue al superar la dicotomía absoluto/proporcional.

Detallamos ya la organización de este primer capítulo en el cual explicaremos los conceptos más importantes que se necesitan en el desarrollo posterior de la memoria. Primeramente vamos a explicar en profundidad el problema de la cuantificación borrosa. Detallamos el marco de trabajo planteado por Zadeh y analizamos sus limitaciones más importantes; exponemos la aproximación a la cuantificación realizada desde el punto de vista lingüístico en la TGQ; e introducimos la aproximación planteada por Glöckner basada en cuantificadores semi-borrosos. Seguidamente describiremos un conjunto de propiedades que nos permitirán analizar rigurosamente la adecuación de los modelos de cuantificación borrosa. Finalizaremos el capítulo con una revisión bibliográfica profunda de las aproximaciones a la cuantificación borrosa más importantes del campo.

Antes de continuar introduciremos la notación básica que utilizaremos en esta memoria para representar los conjuntos borrosos. Por  $\mu_X(e)$ ,  $e \in E$  vamos a denotar la función de pertenencia de un conjunto borroso  $X$  definido sobre el referencial  $E$ ; esto es, el conjunto borroso  $X$  pertenece al conjunto de partes borrosas  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  del referencial  $E$ . Por  $\chi_Y(e)$  representaremos la función de pertenencia de un conjunto nítido  $Y$ ; esto es, el conjunto nítido  $Y$  pertenece al conjunto de partes nítidas  $\mathcal{P}(E)$  del referencial  $E$ . Además, en muchas ocasiones consideraremos el conjunto referencial  $E$  finito. En este caso supondremos  $E$  de cardinalidad  $m$ ; esto es,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ <sup>5</sup>.

Además, para un conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  denotaremos por  $X_{\geq \alpha}$  el alfa-corte de nivel  $\alpha \in [0, 1]$  de  $X$ ; esto es,  $X_{\geq \alpha} = \{e \in E : \mu_X(e) \geq \alpha\}$ . Y por  $X_{> \alpha}$  denotaremos el alfa-corte estricto; esto es,  $X_{> \alpha} = \{e \in E : \mu_X(e) > \alpha\}$ .

## 1.1. El marco tradicional de Zadeh

Aunque Zadeh ya había prestado cierta atención al campo de la cuantificación borrosa [106, 107], se puede considerar que es su trabajo [103] el que inicia la investigación en cuantificación borrosa como un ámbito de interés propio. En el mismo, Zadeh introduce la aproximación básica a la cuantificación borrosa, diferenciando entre cuantificadores lingüísticos de primera y segunda clase (absolutos y proporcionales); planteando su representación a través de números borrosos; y proponiendo la evaluación de sentencias cuantificadas mediante la comparación de los números borrosos utilizados para representar los cuantificadores y medidas de cardinalidad de los conjuntos borrosos a los que se refiere la cuantificación.

Para Zadeh, los cuantificadores de primera clase se asocian a expresiones que presentan cuantificación absoluta mientras que los cuantificadores de segunda clase se asocian a expresiones que presentan cuantificación relativa o proporcional. En [108, pág. 570] Zadeh señala que “*varios, pocos, muchos, no demasiados, aproximadamente cinco, cerca de diez, una cantidad mucho mayor que diez, un número grande de*” son ejemplos de cuantificadores de primera clase. Por ejemplo, la sentencia “*aproximadamente cinco estudiantes son gallegos*” se asocia a un cuantificador de primera clase ya que la cantidad a la que se hace referencia es absoluta. Como ejemplos de cuantificadores de segunda clase en [108, pág. 570] Zadeh propone “*la*

<sup>5</sup>La notación utilizada en esta memoria es básicamente la misma que se utiliza en [41, 45, 47, 50].

*mayoría, muchos, una fracción grande, frecuentemente, de vez en cuando, muchos de, etc.*”. La sentencia “*al menos el ochenta por ciento de los estudiantes son gallegos*” se asocia a un cuantificador de segunda clase al ser la cantidad a la que se hace referencia proporcional.

Nótese que algunos de los ejemplos presentados por Zadeh son considerados indistintamente cuantificadores de primera y segunda clase (por ejemplo, “*muchos*”). Con respecto a este hecho Zadeh menciona que la clase a la que pertenece un cuantificador depende del contexto. Además, Zadeh no realiza una distinción clara entre la cuantificación explícita referida al universo de discurso (e.g., “*aproximadamente cinco*”) y la cuantificación implícita asociada a otro universo base (e.g., “*frecuentemente*”). En [47, sección 1.9] se remarca que Zadeh sólo considera cuantificación implícita aquellos ejemplos en los que no es posible asignarle el rol de cuantificador a ningún elemento de la sentencia cuantificada en cuestión, como por ejemplo “*el paisaje es bello*” o “*Juan no llega tarde*” reinterpretando esta última como “*en raras ocasiones Juan llega tarde*”<sup>6</sup>.

El segundo punto importante en el esquema de Zadeh es la identificación de los cuantificadores con números borrosos. En [108, pág. 571] Zadeh menciona:

*“Debemos ver un cuantificador borroso como un número borroso que nos proporciona una caracterización borrosa absoluta o relativa de la cardinalidad de uno o más conjuntos borrosos”*

De esta manera Zadeh interpreta que podemos especificar la semántica asociada a un cuantificador borroso de primera clase mediante un número borroso absoluto; y la semántica asociada a un cuantificador borroso de segunda clase mediante un número borroso proporcional. Así, el cuantificador de la sentencia “*aproximadamente cinco estudiantes son gallegos*” se puede modelar mediante el número borroso absoluto representado en la figura 1.1a, y el cuantificador de la sentencia “*al menos el ochenta por ciento de los estudiantes son gallegos*” se puede modelar mediante el número borroso proporcional representado en la figura 1.1b.

---

<sup>6</sup>Aunque estas consideraciones serán de importancia menor para esta memoria, la distinción explícito/implícita tiene su relevancia. Aunque la cuantificación explícita es la que realmente ha suscitado la atención de la TGQ, la cuantificación implícita es de interés para el planteamiento de la cuantificación en dominios concretos y el estudio de la expresividad necesaria para el modelado de estos dominios (e.g., modelado de “*frecuentemente*” en un dominio en el que la cuantificación se aplica al tiempo).

Una vez identificados los cuantificadores con números borrosos, es necesario establecer algún procedimiento que nos permita combinar estos números borrosos con los conjuntos borrosos con los que representamos las propiedades (e.g., “*ser estudiante*” o “*ser rubio*”). Zadeh considera que esto es posible mediante la utilización de alguna medida de cardinalidad borrosa de los conjuntos implicados [22, 36, 69, 78, 90–92], combinando estas medidas con los números borrosos que se utilizan para definir el cuantificador. En su primera propuesta Zadeh plantea la utilización de la cardinalidad borrosa escalar  $\sum Count$  [69] de los conjuntos borrosos para esta tarea. Para entender mejor el esquema planteado por Zadeh presentamos a continuación esta propuesta para cuantificadores de primera clase.<sup>7</sup>

Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso y  $\mu_Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{I}$  un número borroso absoluto. Entonces, para evaluar una sentencia que presente cuantificación absoluta Zadeh propone:

$$\tilde{Q}(X) = \mu_Q \left( \sum_{e \in E} \mu_X(e) \right)$$

Por ejemplo, si la expresión que queremos evaluar es “*alrededor de 3 estudiantes son rubios*”, siendo el conjunto borroso de “*estudiantes rubios*”:

$$X = \{0,3/e_1, 0,7/e_2, 1/e_3, 0,5/e_4, 0/e_5\}$$

y el número borroso “*alrededor de 3*” (definido mediante una función trapezoidal)

$$\mu_{alrededor.3}(x) = T_{1,3,3,5}(x)$$

entonces<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{alrededor.3}}(X) &= \mu_{alrededor.3} \left( \sum_{e \in E} \mu_X(e) \right) \\ &= T_{1,3,3,5}(2,5) \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Además, en [103] Zadeh también plantea un mecanismo similar para la evaluación de expresiones en las que intervengan cuantificadores de segunda clase. Zadeh

<sup>7</sup>En la sección 1.5.1 se define y analiza en profundidad esta propuesta.

<sup>8</sup>En la definición de  $\widetilde{\text{alrededor.3}}$  estamos utilizando ya la notación que será habitual en esta memoria; esto es, el cuantificador borroso  $\widetilde{\text{alrededor.3}} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow [0, 1]$  es una función de las partes borrosas del referencial  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  en el universo de grados de verdad  $[0, 1]$ .

no se limita a plantear la evaluación de sentencias cuantificadas mediante medidas de cardinalidad borrosa escalares, sino que también plantea la utilización de medidas de cardinalidad borrosa. La evaluación de sentencias cuantificadas mediante el uso de medidas de cardinalidad borrosa ha sido una constante en la bibliografía posterior. Para más información, aconsejamos al lector consultar el apartado de revisión bibliográfica 1.5.

En general Zadeh no realiza una distinción clara entre los argumentos borrosos que se combinan con los cuantificadores borrosos. Esto es, para Zadeh las sentencias “*alrededor de 6 son altos*” y “*alrededor de 6 estudiantes altos son rubios*”, definidas sobre un referencial de estudiantes, están ambas asociadas a cuantificadores de primera clase, independientemente de que en la primera sentencia intervenga únicamente un conjunto borroso y en la segunda dos conjuntos borrosos. Normalmente en la bibliografía se asume (a veces no explícitamente) que la segunda situación es reducible a la primera tomando la intersección de los conjuntos borrosos que denotan las propiedades “*ser alto*” y “*ser rubio*”. No obstante, Yager ha presentado en [100, págs 390-391] una diferenciación explícita de los tipos de expresiones que se pueden manejar en la aproximación de Zadeh dependiendo de que la cuantificación manejada sea unaria o binaria. Por su interés para el desarrollo posterior de la memoria y porque determina claramente la potencia expresiva del marco de Zadeh presentamos a continuación dicha clasificación.

En [100, págs 390-391] Yager diferencia entre dos tipos básicos de sentencias cuantificadas dependiendo del número de argumentos: *sentencias cuantificadas de tipo I* y *sentencias cuantificadas de tipo II*.

Según Yager, las sentencias cuantificadas de tipo I encajan en la expresión

$$Q \text{ } E \text{ s son } A$$

donde  $E$  denota el conjunto referencial,  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  es un conjunto borroso y  $Q$  un cuantificador lingüístico que puede ser absoluto o proporcional. De esta manera, el carácter absoluto/proporcional de  $Q$  establece subtipos distintos dentro de las sentencias cuantificadas de tipo I. Como ejemplo “*alrededor de 6 estudiantes son altos*” es una sentencia de tipo I absoluta mientras que “*más del 60% de los estudiantes son altos*” es una sentencia de tipo I proporcional.

Las sentencias cuantificadas de tipo II encajan en la expresión:

$$Q \text{ } (BE) \text{ s son } A \tag{1.1}$$

donde  $B \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  y  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  se refieren a conjuntos borrosos y  $Q$  es un cuantificador lingüístico que puede ser absoluto o proporcional. Nótese que en la expresión 1.1  $(BE)s$  se está utilizando no para denotar un conjunto borroso, sino para indicar que el conjunto borroso  $B$  está definido sobre el conjunto base  $E$ . Por ejemplo, en “*muchos de los estudiantes jóvenes son altos*”  $E$  se refiere al conjunto base “*estudiantes*” y  $B$  al conjunto borroso “*jóvenes*” definido sobre el referencial de estudiantes. Ejemplos de expresiones de tipo II son “*alrededor de 6 estudiantes jóvenes son altos*” y “*más del 60 % de los estudiantes jóvenes son altos*”; la primera de tipo II absoluta y la segunda de tipo II proporcional.

Así, la división de Yager considera separadamente el caso unario absoluto, el caso unario proporcional, el caso binario absoluto, y el caso binario proporcional; es decir, el marco de Zadeh permite tratar cuatro tipos distintos de sentencias cuantificadas.

Para ser coherentes con la notación utilizada en [47, sección A.2] denotaremos estos casos como:

- Cuantificación absoluta no restringida (unaria absoluta o tipo I absoluta según Yager):

$$\mathcal{Z}_{abs}^{(1)}(\mu_Q) : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$$

donde  $\mu_Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{I}$  denota un número borroso absoluto. De esta manera  $\mathcal{Z}_{abs}^{(1)}$  es una función que lleva números borrosos absolutos en funciones con dominio en las partes borrosas de  $E$  e imagen en el universo de valores de verdad.

- Cuantificación proporcional no restringida (unaria proporcional o tipo I proporcional según Yager):

$$\mathcal{Z}_{prp}^{(1)}(\mu_Q) : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$$

donde  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  denota un número borroso proporcional.

- Cuantificación absoluta restringida (binaria absoluta o tipo II absoluta según Yager):

$$\mathcal{Z}_{abs}^{(2)}(\mu_Q) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$$

donde  $\mu_Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{I}$  denota un número borroso absoluto.

- Cuantificación proporcional restringida (binaria proporcional o tipo II proporcional según Yager):

$$\mathcal{Z}_{prp}^{(2)}(\mu_Q) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$$

donde  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  denota un número borroso proporcional.

Aunque volveremos sobre este tema, la cuantificación binaria es *restringida* porque el primer argumento (conjunto borroso) de los cuantificadores se utiliza para limitar el conjunto de elementos a los cuales se aplica el cuantificador.

Como ya hemos mencionado, en la bibliografía posterior no es habitual la diferenciación de las situaciones anteriores, asumiéndose que las sentencias cuantificadas que presentan cuantificación binaria absoluta pueden ser evaluadas utilizando la definición asociada al caso unario absoluto (por ejemplo, véase [80, pág. 66]):

$$\mathcal{Z}_{abs}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) = \mathcal{Z}_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X_1 \tilde{\cap} X_2)$$

donde  $\tilde{\cap}$  es un operador de intersección borrosa modelado a través de una tnorma. Parafraseando, es equivalente decir que “*alrededor de tres estudiantes jóvenes son gallegos*” que “*alrededor de tres estudiantes son jóvenes y gallegos*”.

De igual manera también se suele suponer que

$$\mathcal{Z}_{prp}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \mathcal{Z}_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(E, X)$$

Es decir, “*más del 30 % son jóvenes*” es equivalente a “*más del 30 % de los estudiantes son jóvenes*” si el conjunto base con el que trabajamos sólo contiene estudiantes (véase [47, sección A.2]).

Con esto finalizamos la exposición de las ideas más importantes del marco de trabajo de Zadeh. Es indudable que la aproximación es interesante, y prueba de ello es la cantidad de propuestas que encontramos en la bibliografía que siguen este enfoque [12, 13, 19–22, 25, 36, 37, 66, 78, 80, 93–100, 103]. No obstante, la aproximación de Zadeh es limitada. Las siguientes son sólo una muestra de las principales críticas que se derivan de la exposición realizada en [47, sección 1.9]:

- La crítica más importante es que la aproximación de Zadeh está muy lejos de poder representar el fenómeno de la cuantificación en lenguaje natural (e.g., “*hay más trabajadores de mediana edad que trabajadores jóvenes*”). Aunque Zadeh [103, pág. 570] menciona la posibilidad de cuantificadores borrosos de tercera clase, hay que esperar hasta el trabajo [41] para encontrar una referencia clara a cuantificadores distintos de los casos absoluto/proporcional. Aparentemente la dicotomía absoluto/proporcional inicial ha escondido el hecho de que la cuantificación no está limitada, ni mucho menos, a estas dos situaciones.

- La identificación de los cuantificadores con números borrosos oculta que en realidad un cuantificador borroso es un predicado borroso de segundo orden. De esta manera Zadeh reduce una especificación de segundo orden a una especificación de primer orden; esto es, reduce la representación de cuantificadores como predicados de segundo orden (relaciones entre conjuntos) a una representación como predicados de primer orden (propiedades sobre  $\mathbb{R}^+$  o sobre  $[0, 1]$  representadas por números borrosos absolutos  $\mu_Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{I}$  o proporcionales  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ ). Aunque en este momento la especificación a partir de números borrosos pueda parecer adecuada, la representación de los cuantificadores como predicados de segundo orden permite expresar de un modo conveniente las relaciones entre los distintos tipos de cuantificadores presentes en lenguaje natural, permitiendo una manipulación algebraica que difícilmente es aplicable sobre el marco de Zadeh.
- El concepto de cardinalidad borrosa es fundamental en el marco de trabajo de Zadeh, pero el problema de definir de manera adecuada la cardinalidad de un conjunto borroso no es un problema cerrado. Existen medidas de cardinalidad borrosa cuyo comportamiento teórico se considera muy adecuado [36, 78, 90–92] pero que no permiten (o no se sabe cómo) utilizar para definir modelos de cuantificación borrosa aceptables. Sobre este punto aconsejamos al lector la consulta del apartado de revisión bibliográfica (sección 1.5).
- La utilización de números borrosos proporcionales  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  para especificar la cuantificación proporcional no restringida “*más del 80 % de los  $Y_1$ s son  $Y_2$ s*” olvida el hecho de que la cardinalidad relativa  $\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}$  está indefinida para  $Y_1 = \emptyset$ . Aunque podría parecer que este es un problema menor del marco de Zadeh, esta situación ha pasado inadvertida en la definición de muchas de las aproximaciones posteriores (véase la sección 1.5). Sorprendentemente, muchos de los modelos para modelar cuantificación proporcional no restringida simplemente no están definidos para esta situación.

Por estas y otras razones resulta necesaria la definición de un nuevo marco para el estudio de la cuantificación borrosa. En la siguiente sección se exponen algunos de los conceptos básicos de la TGQ, la teoría sobre la cual Glöckner ha construido su marco de trabajo para la cuantificación borrosa que evita las dificultades que acabamos de mencionar.

## 1.2. La cuantificación en el lenguaje natural

En este apartado se introduce el análisis de la cuantificación desde el punto de vista de la TGQ [5, 40, 56–58, 86]. Esta teoría, desarrollada principalmente a lo largo de las dos últimas décadas, combina las perspectivas lógica y lingüística para analizar el fenómeno de la cuantificación en el lenguaje natural.

El análisis de los cuantificadores planteado en la TGQ surge debido a las limitaciones que presenta la aproximación a la cuantificación planteada en la lógica clásica. Tal como se menciona en [5, pág. 159]:

*Primero, hay sentencias que simplemente no se pueden simbolizar en una lógica que esté restringida a los cuantificadores de primer orden  $\forall$  y  $\exists$ . Segundo, la estructura sintáctica de las sentencias cuantificadas en cálculo de predicados es completamente diferente de la estructura sintáctica de las sentencias cuantificadas en lenguaje natural.*

El segundo de los problemas mencionados es muy importante desde el punto de vista lingüístico. Las diferencias entre la estructura sintáctica del lenguaje lógico y de los lenguajes humanos dificulta, sin duda, la representación lógica del lenguaje. Pero el primer problema es fundamental. Si la lógica de primer orden fuese capaz de representar la cuantificación en el lenguaje natural entonces el lenguaje lógico podría ser una aproximación compleja, pero suficiente para representar el fenómeno de la cuantificación. Pero el hecho es que la lógica de primer orden no es capaz de representar adecuadamente el fenómeno de la cuantificación en el lenguaje. En el mismo trabajo [5, págs. 160-161] se enuncia que muchos cuantificadores no son representables mediante lógica de predicados. Por ejemplo, en la sentencia “*más de la mitad de los estudiantes son gallegos*” el cuantificador “*más de la mitad*” no se puede representar en lógica de predicados. En [5, pág. 214] se demuestra que esto no es posible incluso para dominios finitos. Intuitivamente, dado un conjunto base  $E$ , no podemos plantear una fórmula lógica de longitud finita que permita representar el cuantificador “*más de la mitad*” independientemente del número de elementos del referencial  $E$ . De igual manera, el resto de las expresiones en las que aparece cuantificación proporcional (e.g. “*más del 80 %*”), salvando algunos casos triviales como “*más del 0 %*” o “*el 100 %*”, tampoco son representables mediante lógica de predicados.

En [5, pág. 214] también se dan otros ejemplos de cuantificadores que no se pueden representar en lógica de predicados, como por ejemplo “*un número finito de*”.

De este modo, el marco proporcionado por la lógica de predicados no es un mecanismo adecuado para la representación del amplio conjunto de cuantificadores que se manejan en el lenguaje natural. Por esta razón en la TGQ se plantea este análisis mediante un mecanismo más potente, los cuantificadores generalizados.

Desde la perspectiva lingüística, el principal énfasis en el estudio del fenómeno de la cuantificación ha sido puesto en el análisis del comportamiento y de las posibles denotaciones de los *determinantes* (como por ejemplo “*el*”, “*la mayoría*”, “*todos*”, “*estos*”, etc.). Los determinantes son sin duda los elementos que más habitualmente desempeñan el rol de la cuantificación en lenguaje natural (LN) [56,57] y aquellos en los que la cuantificación aparece de manera más explícita. A continuación explicamos como se comportan estos elementos en el lenguaje.

Los determinantes se suelen combinar con los *nombres* o grupos de entidades (Ns) para formar las *frases nominales* o *frases determinantes*. Por ejemplo, en la sentencia “*todos los hombres caminan*” son las palabras subrayadas las que realizan el papel de determinante, combinándose con el nombre “*hombres*” para formar la frase determinante “*todos los hombres*”. A su vez, esta frase determinante se combina con el predicado “*caminan*” en la formación de la sentencia enunciativa “*todos los hombres caminan*”.

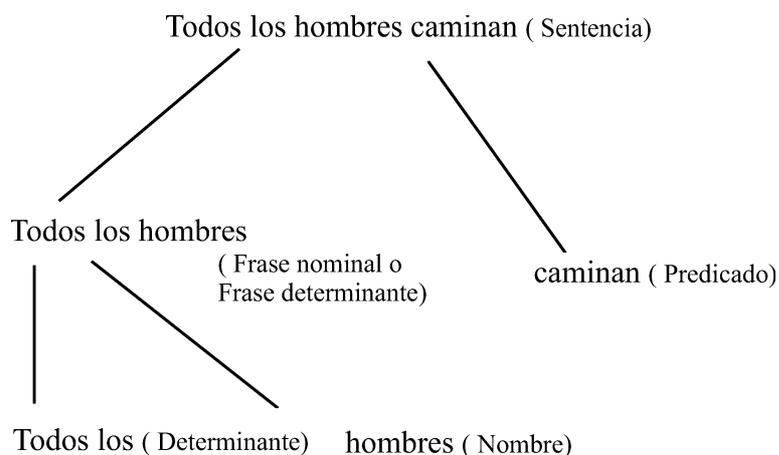
En la figura 1.2 se muestra el análisis sintáctico de la sentencia anterior.

El abanico de elementos que juegan el papel de determinantes en el lenguaje es muy amplio. Por ejemplo, en lengua castellana se suelen distinguir entre *artículos*, *demonstrativos*, *posesivos*, *indefinidos*, *numerales*, *interrogativos* y *exclamativos*. Pero el papel de determinante no es desempeñado únicamente por estos elementos. La combinación de determinantes puede jugar el mismo papel que un único determinante. Además, tal como se muestra en [56,57] existen muchos otros elementos más complejos que desempeñan el papel de determinantes. A continuación mostramos algunos de los ejemplos presentados en [56, pág. 45]:

- **determinantes simples:**<sup>9</sup> “*todos*”, “*alguno*”, “*estos*”, “*la mayoría*”, “*pocos*”,

---

<sup>9</sup>Se ha escogido “*simples*” como traducción del término inglés “*lexical*” [56, pág. 45], ya que ésta es la denominación utilizada en [57, pág. 254].



**Figura 1.2:** Análisis sintáctico de la sentencia “*todos los hombres caminan*”.

etc.

- **determinantes cardinales:** “*exactamente diez*”, “*aproximadamente diez*”, “*entre cinco y diez*”, “*infinitamente muchos*”, etc.
- **determinantes aproximativos:** “*alrededor de diez*”, “*aproximadamente diez*”, “*casi todos*”, etc.
- **determinantes definidos:** “*estos*”, “*el*”, “*mi*”, “*estos diez*”, “*los diez ... de Juan*”, etc.
- **determinantes de excepción:** “*todos menos diez*”, “*todos ... menos Juan*”, etc.
- **determinantes acotados:** “*exactamente diez*”, “*entre cinco y diez*”, etc.
- **determinantes posesivos:** “*mi*”, “*los ... de Juan*”, etc.
- **determinantes que emiten valoraciones de juicio:** “*demasiados*”, “*muy pocos*”, etc.
- **determinantes proporcionales:** “*más del veinte por ciento*”, “*muchos*”, “*menos de la mitad*”, etc.
- **determinantes partitivos:** “*más ... de los de Juan que de los de María*”, etc.

- **determinantes negados:** “*no todos*”, “*no más de la mitad*”, etc.
  
- **determinantes coordinados:** “*la mayoría pero no todos*”, “*al menos dos pero no más de diez*”, etc.)
  
- **determinantes restringidos por adjetivos:** “*más ... hombres que mujeres*”, “*la mayoría de los ... gallegos*”, etc.

Nótese que los ejemplos anteriores no definen clases disjuntas.

La clasificación anterior es sólo un ejemplo de la diversidad de elementos que presenta el lenguaje natural para tratar expresiones cuantificadas. Para poder clasificar y analizar el comportamiento de los determinantes en la TGQ se ha realizado un estudio profundo de las denotaciones (es decir, la semántica) de los distintos tipos de determinantes. Y aunque la TGQ trabaja con grados de verdad binarios, el estudio realizado en esta teoría de la semántica de los determinantes nos va a ser de mucha utilidad para el caso borroso.

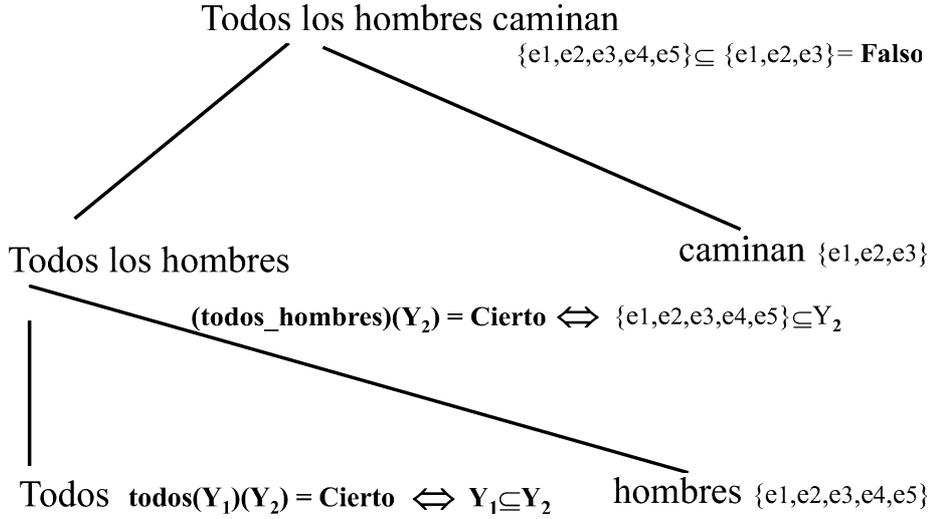
Desde el punto de vista semántico, la asignación de un valor de verdad a los enunciados (cierto o falso) se realiza suponiendo un modelo  $m$  que define los objetos de interés de nuestro dominio  $E$ , y la denotación de los distintos elementos del *vocabulario*<sup>10</sup> que estemos utilizando. Dado un modelo, los predicados se interpretan como subconjuntos (propiedades o relaciones unarias) de  $E$ , y las frases nominales se interpretan como *cuantificadores generalizados* (*GQs*); es decir, funciones de propiedades en valores de verdad.

De aquí en adelante denotaremos por  $\mathbf{2}$  el conjunto de valores de verdad clásicos; esto es,  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$  ó  $\mathbf{2} = \{\text{falso}, \text{cierto}\}$ .

El ejemplo que acabamos de plantear nos ayudará a explicar estos conceptos. En el mismo, la denotación de “*caminan*” es el conjunto de elementos del universo base  $E$  que tienen la propiedad de caminar; la denotación de “*hombres*” es el subconjunto de elementos de  $E$  que tienen la propiedad de ser hombres; y la denotación de “*todos*”

---

<sup>10</sup>Es decir, los elementos sintácticos de nuestro lenguaje.



**Figura 1.3:** Evaluación de la sentencia “*todos los hombres caminan*”.

es una función  $\mathbf{todos} : (Y_1 \in \mathcal{P}(E)) \rightarrow (f : Y_2 \in \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2})$  definida como<sup>11</sup>

$$\mathbf{todos}(Y_1)(Y_2) = 1 \Leftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2 \quad (1.2)$$

La figura 1.3 muestra la denotación de los elementos de la sentencia “*todos los hombres caminan*” para una situación particular y su evaluación.

En el ejemplo anterior, el determinante “*todos*” se combina con el nombre “*hombres*” para formar la frase nominal. Los determinantes que se combinan con un único grupo nominal se suelen denotar como  $Det_1$  en la bibliografía.

Pero existen determinantes que se combinan con más de una frase nominal [58]. Por ejemplo, en la sentencia “*más estudiantes que profesores han venido a la fiesta*” la denotación del determinante “*más ... que*” se puede expresar con la función:

$$\mathbf{más...que}(Y_1, Y_2)(Y_3) = 1 \Leftrightarrow |Y_1 \cap Y_3| > |Y_2 \cap Y_3| \quad (1.3)$$

En la notación que hemos utilizado para representar la denotación de los deter-

<sup>11</sup>Ya hemos apuntado que los cuantificadores generalizados se pueden ver como relaciones o predicados de segundo orden. Por ejemplo, la denotación de “*todos*” se puede interpretar como la relación

$$R_{all} \subseteq \mathcal{P}(E)^2 / (Y_1, Y_2) \in R_{all} \Leftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2$$

Mientras que en lógica de primer orden las propiedades se aplican a las entidades del referencial, los predicados de segundo orden se aplican a subconjuntos del referencial [40, pág. 228].

minantes (expresiones 1.2 y 1.3) hemos diferenciado explícitamente entre las propiedades asociadas a los grupos nominales y las propiedades asociadas a los predicados. Esto es muy habitual en los trabajos que estudian la cuantificación desde el punto de vista lingüístico, y también nos será útil en algunas ocasiones (por ejemplo en la sección 4.6). Pero desde el punto de vista matemático es más cómodo trabajar con una “notación plana”, tal como se hace en [41, 45, 47, 50]:

**Definición 1 (Cuantificador Clásico)** [47, pág. 56] *Un cuantificador (generalizado) bivaluado en un conjunto base  $E \neq \emptyset$  es una función  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{2}$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  es la aridad (número de argumentos) de  $Q$ .*

Dos ejemplos de cuantificadores en la notación anterior son:

$$\begin{aligned} \mathbf{todos}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & Y_1 \not\subseteq Y_2 \\ 1 & Y_1 \subseteq Y_2 \end{cases} & (1.4) \\ \mathbf{al\_menos\_el80\%de\_los}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \geq 0,8 & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

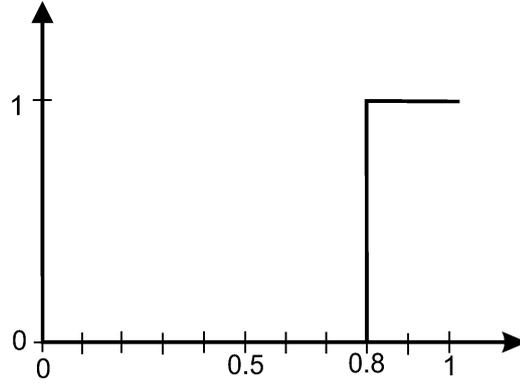
Aunque la primera notación es la más habitual, en la TGQ también se utiliza está última. En general ésta es la notación que vamos a utilizar en esta memoria, aunque en ocasiones utilizaremos la primera para destacar alguna relación interesante con el lenguaje natural<sup>12</sup>.

En la figura 1.4 se representa el número borroso asociado al cuantificador “al menos el 80 %”.

A partir de ahora denominaremos a los cuantificadores de los tipos  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$ ,  $Q' : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{2}$ ,  $Q'' : \mathcal{P}^3(E) \rightarrow \mathbf{2}$ , etc. unarios, binarios, ternarios, etc. respectivamente.

<sup>12</sup>Las dos notaciones son equivalentes. Por ejemplo, podemos definir las funciones  $\mathbf{todos}' : \mathcal{P}(E) \rightarrow (\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2})$ ,  $\mathbf{mas...que}' : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow (\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I})$  a partir de las funciones  $\mathbf{todos} : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{mas...que} : \mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  simplemente haciendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{todos}'(Y_1)(Y_2) &= \mathbf{todos}(Y_1, Y_2) \\ \mathbf{mas...que}'(Y_1, Y_2)(Y_3) &= \mathbf{mas...que}(Y_1, Y_2, Y_3) \end{aligned}$$



**Figura 1.4:** Número borroso asociado al cuantificador **al menos el 80% de los**  $(Y_1, Y_2) \rightarrow \mathbf{2}$ .

La cuantificación binaria es sin duda la más habitual e interesante, y con diferencia aquella a la que se le ha prestado más atención en la TGQ. En este caso, los grupos nominales que se combinan con los cuantificadores “restringen” los elementos del referencial que tienen interés para el cuantificador en cuestión, por lo que se suelen denominar *restricción* del cuantificador. Los predicados establecen los elementos de interés para la restricción del cuantificador y se suelen denominar *alcance* del cuantificador. La cuantificación binaria se corresponde con la cuantificación de tipo II en el sentido de Yager.

Un hecho que quizás haya pasado inadvertido es que las definiciones que estamos manejando no sólo son útiles para manejar la *cuantificación cuantitativa*, sino que también pueden manejar cuantificadores *no cuantitativos*. Para aclarar este hecho consideremos los siguientes cuantificadores **Juan**:  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$  y **todos menos Juan**:  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{2}$  definidos como

$$\mathbf{Juan}(Y) = \begin{cases} 0 & Y \neq \{\mathbf{Juan}\} \\ 1 & Y = \{\mathbf{Juan}\} \end{cases}$$

$$\mathbf{todos\_menos\_Juan}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 0 & Y_1 \cap \neg Y_2 \neq \{\mathbf{Juan}\} \\ 1 & Y_1 \cap \neg Y_2 = \{\mathbf{Juan}\} \end{cases}$$

que por ejemplo podrían estar asociados a las sentencias “*Juan corre*” o “*todos los estudiantes menos Juan son gallegos*”<sup>13</sup>. Estos cuantificadores no son cuantitativos

<sup>13</sup>Nótese que para el cumplimiento del cuantificador de excepción **todos menos Juan**:

porque su definición depende de elementos particulares del referencial. En la sección 1.4 se desarrolla adecuadamente el concepto de cuantitatividad.

Las definiciones anteriores evidencian la potencia del tratamiento de la cuantificación en lenguaje natural, capaz de manejar situaciones en las que la cuantificación no depende exclusivamente de la cardinalidad de los argumentos.

En las expresiones 1.2 y 1.3 hemos distinguido entre las propiedades que se combinan con la semántica de los determinantes ( $Y_1$  en la expresión 1.2 e  $Y_1, Y_2$  en la expresión 1.3) y la propiedad que se combina con la semántica de la frase determinante ( $Y_2$  en la expresión 1.2 e  $Y_3$  en la expresión 1.3). Para poder expresar de una manera clara el rol de las frases nominales y el rol de los predicados introducimos a continuación la notación utilizada en [58, pág. 840]

$$\begin{aligned} TYPE \langle 1 \rangle &= [\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}] \\ TYPE \langle 1, 1 \rangle &= [\mathcal{P}(E) \rightarrow TYPE \langle 1 \rangle] \\ TYPE \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle &= [\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow TYPE \langle 1 \rangle] \end{aligned}$$

donde con  $[X \rightarrow Y]$  se denota el conjunto de funciones con dominio en  $X$  y rango en  $Y$ .

Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{todos} &\in TYPE \langle 1, 1 \rangle \\ \mathbf{más...que} &\in TYPE \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle \end{aligned}$$

En esta notación, el primer elemento del par  $\langle a, b \rangle$  representa el número y la aridad de las propiedades que se combinan con los determinantes, y el segundo elemento representa el número y la aridad de los predicados. Esta notación será de utilidad en el análisis de expresiones con *cuantificación anidada*<sup>14</sup> desarrollado en la sección 4.6.

Dentro de la TGQ se ha realizado un gran esfuerzo en el estudio de las propiedades de los cuantificadores y de las diversas relaciones existentes entre los mismos

---

$\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{2}$  se necesita que **Juan** pertenezca al conjunto de estudiantes pero que no pertenezca al conjunto de gallegos. Nótese también que, si exceptuamos a **Juan**, todos los estudiantes deben ser gallegos o, lo que es lo mismo, no existe ningún estudiante que no sea gallego.

<sup>14</sup>Sentencias en las que intervienen “varios niveles” de cuantificación. Por ejemplo, “*menos del 20 % de los estudiantes aprueban más del 80 % de las asignaturas*”.

(*conservatividad, monotonía, relaciones de negación y dualidad, etc.*), que explicaremos en detalle en la sección 1.4. Desde la perspectiva lógica-lingüística estos análisis son de mucho interés, ya que permiten a los lingüistas estudiar diversos aspectos relacionados con el uso de la cuantificación en las lenguas, tales como la búsqueda de *universales del lenguaje* para decidir que es y no es expresable mediante cuantificación en el lenguaje natural, el estudio de la representación de expresiones cuantificadas complejas a partir de expresiones más sencillas para cumplir con el *principio de composicionalidad de Frege*, la relación entre la semántica de los cuantificadores y las expresiones sintácticas en las que se utilizan, etc. [40, sección 7.2.1].

Aunque para nosotros el estudio del lenguaje en sí no revierta especial interés, lo que sí resulta tremendamente interesante es que una gran parte del análisis realizado en la TGQ se puede generalizar al caso borroso. Sin duda, la reutilización del análisis clásico de la TGQ ha sido uno de los mayores aciertos de Glöckner en el planteamiento de su marco para la cuantificación borrosa. En la siguiente sección explicamos la extensión propuesta por este autor para generalizar la TGQ al caso borroso.

## 1.3. El marco de trabajo basado en mecanismos de borrosificación de cuantificadores

### 1.3.1. De cuantificadores borrosos a cuantificadores semi-borrosos

La aproximación a la cuantificación realizada en la TGQ es muy interesante. Pero como hemos explicado en la sección anterior, la TGQ sólo trata el modelado de la cuantificación clásica. Para poder manejar la vaguedad del lenguaje es necesario que los cuantificadores puedan relacionar conjuntos borrosos de una manera borrosa. La generalización obvia de los cuantificadores clásicos es la siguiente:

**Definición 2** [47, pág. 65] *Un cuantificador borroso  $n$ -ario en un conjunto base  $E \neq \emptyset$  es una función  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \longrightarrow \mathbf{I}$ .*

Los cuantificadores borrosos han sido introducidos por Glöckner en [41, pág. 6] bajo el nombre de *determinantes borrosos*<sup>15</sup>. La denominación actual es la actualmente preferida por dicho autor.

Mientras que los argumentos y la imagen de los cuantificadores clásicos son nítidas, los argumentos y la imagen de los cuantificadores borrosos son borrosas. De esta manera los cuantificadores borrosos son capaces de manejar expresiones del tipo “*alrededor del 80 % de los estudiantes jóvenes son eficientes*”, donde se asume que las propiedades “*estudiantes jóvenes*” y “*estudiantes eficientes*” se representan mediante conjuntos borrosos. Además, la definición anterior no limita la imagen de los cuantificadores borrosos al caso nítido ( $\{0, 1\}$ ), ya que permite que la misma pueda ser borrosa.

Presentamos ahora dos ejemplos de cuantificadores borrosos. Supongamos que queremos definir la semántica asociada a las expresiones “*algún  $X_1$  es  $X_2$* ” y “*todos los  $X_1$  son  $X_2$* ” donde  $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  son borrosos. Una posibilidad para definir los cuantificadores borrosos **algún** :  $\widetilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  y **todos** :  $\widetilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{algún}}(X_1, X_2) &= \sup \{ \min(\mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e)) : e \in E \} \\ \widetilde{\mathbf{todos}}(X_1, X_2) &= \inf \{ \max(1 - \mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e)) : e \in E \} \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde  $\widetilde{\mathbf{algún}} : \widetilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  se interpreta como la versión borrosa del cuantificador clásico **algún** :  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

$$\mathbf{algún}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \\ 1 & : Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

y  $\widetilde{\mathbf{todos}} : \widetilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es la versión borrosa del cuantificador definido en la expresión 1.2.

Las definiciones anteriores son bastante razonables desde el punto de vista de la lógica borrosa. Para el cuantificador borroso  $\widetilde{\mathbf{algún}}$ ,  $\min(\mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e))$  representa el valor de la intersección de los conjuntos  $X_1$  y  $X_2$  para cada  $e \in E$  cuando se asume que la intersección se modela con la tnorma mínimo; esto es,

$$\mu_{X_1 \tilde{\cap} X_2}(e) = \min(\mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e))$$

Y el supremo coincide con el máximo en conjuntos finitos. De esta manera se interpreta que la sentencia “*algún  $X_1$  es  $X_2$* ” es equivalente a “*existe un elemento que es*

<sup>15</sup> “Fuzzy determiners” en inglés.

$X_1$  y  $X_2$ ". De manera análoga,  $\max(1 - \mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e))$  es una función de implicación borrosa y el ínfimo se utiliza para medir en que grado se cumple la implicación para todo  $e \in E$ .

Veamos ahora un ejemplo de como se puede utilizar el cuantificador borroso  $\widetilde{\text{todos}}(X_1, X_2)$  para evaluar una expresión cuantificada:

**Ejemplo 1** Consideremos la evaluación de la sentencia "todos los estudiantes jóvenes son eficientes" sobre el conjunto referencial  $E = \{e_1, \dots, e_4\}$ . Supongamos que las propiedades "ser alto" y "ser eficiente" vienen dadas por los siguientes conjuntos borrosos:

$$X_1 = \{0,8/e_1, 1/e_2, 0,6/e_3, 0,3/e_4\}, X_2 = \{0,9/e_1, 0,7/e_2, 0,3/e_3, 0,2/e_4\}$$

respectivamente. Utilizando la expresión 1.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{todos}}(X_1, X_2) &= \inf \{ \max(1 - \mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e)) : e \in E \} \\ &= \inf \{0,9, 0,7, 0,4, 0,7\} = 0,4 \end{aligned}$$

La potencia expresiva de los cuantificadores borrosos es suficiente para modelar las expresiones cuantificadas. Pero los ejemplos que acabamos de presentar nos permiten intuir algunas de las dificultades de los cuantificadores borrosos. Aunque las definiciones que hemos utilizado para representar la semántica de los determinantes "todos" y "algunos" son razonables, no existe ninguna razón para que no haya otras opciones igualmente válidas. De hecho, la utilización de una tnorma o una función de implicación distinta en las definiciones de  $\widetilde{\text{algún}}$  y  $\widetilde{\text{todos}}$  da lugar a expresiones que en primera instancia parecen tan válidas como las que se han planteado. Este es uno de los grandes problemas de los cuantificadores borrosos. La generalización obvia de los cuantificadores clásicos nos ha llevado a una definición que es en realidad "demasiado potente" y que no nos ayuda a distinguir entre las diferentes opciones que existen a la hora de definir los cuantificadores borrosos.

Además, los ejemplos que hemos presentado representan casos muy particulares en los cuales nuestras intuiciones acerca de como modelar los cuantificadores borrosos son válidas. La manera de modelar adecuadamente cuantificadores borrosos menos obvios, como por ejemplo el asociado a la sentencia, "la proporción de jóvenes que obtienen salarios altos es baja", es mucho menos evidente.

Glöckner menciona que en el caso clásico existen intuiciones muy fuertes acerca de cuál o cuáles pueden ser las semánticas adecuadas para los cuantificadores.

Por ejemplo, la definición del cuantificador universal es sin duda aceptada. De igual manera, la definición de la semántica de “al menos el 80 %” (cuantificador **al\_menos\_el80%de\_los**  $(Y_1, Y_2) : \mathcal{P}(E)^2 \longrightarrow \mathbf{2}$  en la expresión 1.4) es también incuestionable (por lo menos para el caso en que  $Y_1 \neq \emptyset$ ). Pero en el caso borroso, las intuiciones acerca de las definiciones adecuadas son mucho menos evidentes. Si la definición de la semántica del cuantificador asociado al determinante “todos” es controvertida en el caso borroso, mucho más lo es la definición de la versión borrosa del cuantificador asociado a la semántica del determinante “al menos el 80 %”. El hecho de que la mayoría de los modelos para evaluar sentencias cuantificadas borrosas presentan problemas muy graves (véase la sección 1.5) es una evidencia incuestionable de la dificultad de este problema.

Según Glöckner [47, sección 2.4] la clase de cuantificadores borrosos es sin duda suficientemente rica para denotar la semántica de los cuantificadores. El problema según él es que no somos capaces de identificar las definiciones adecuadas para los cuantificadores borrosos. Glöckner denomina a este problema el *dilema de los cuantificadores borrosos*. La incapacidad de la TGQ para manejar la vaguedad nos ha llevado a optar por una aproximación cuyo poder parece muy difícil de controlar.

Además, Glöckner muestra que el problema no se debe al requerimiento de que los cuantificadores borrosos puedan representar “cantidades o requerimientos aproximados” sino al hecho de que los cuantificadores borrosos acepten argumentos borrosos. La semántica asociada a la expresión “al menos el 80 %” es inherentemente nítida, pero cuando intentamos extender la definición del cuantificador **al\_menos\_el80%de\_los**  $(Y_1, Y_2) : \mathcal{P}(E)^2 \longrightarrow \mathbf{2}$  al caso borroso nuestras intuiciones fallan. Sin embargo, no tenemos problemas en entender una definición que asigne un grado de verdad no nítido (por ejemplo 0,7) a cierta medida de cardinalidad de conjuntos nítidos (por ejemplo  $\frac{|\{e_1, e_2, e_3\} \cap \{e_1, e_2\}|}{|\{e_1, e_2, e_3\}|} = \frac{2}{3}$ ). A fin de cuentas, esta es la idea de Zadeh al modelar los cuantificadores mediante números borrosos absolutos y proporcionales.

Por lo tanto, parece que todavía somos capaces de asociar grados de verdad borrosos en el caso en que manejemos argumentos nítidos. Por esta razón Glöckner decide proponer un nivel de especificación intermedio entre los cuantificadores clásicos y los cuantificadores borrosos: *los cuantificadores semi-borrosos*:

**Definición 3** [47, pág. 71] *Un cuantificador semi-borroso n-ario sobre un conjunto base  $E \neq \emptyset$  es una función  $Q : \mathcal{P}(E)^n \longrightarrow \mathbf{I}$ .*

En [41, pág. 6] los cuantificadores semi-borrosos se denominan *pre-determinantes borrosos*<sup>16</sup>.

Los argumentos de los cuantificadores semi-borrosos son conjuntos nítidos por lo que están a medio camino entre los cuantificadores clásicos y los cuantificadores borrosos. Al permitir imágenes graduales, los cuantificadores semi-borrosos son un medio adecuado para especificar la cuantificación aproximada. Presentamos a continuación dos ejemplos de cuantificadores semi-borrosos:

$$\begin{aligned} \text{alrededor\_de\_5}(Y_1, Y_2) &= T_{2,4,6,8}(|Y_1 \cap Y_2|) & (1.6) \\ \text{alrededor\_del\_80\%o\_mas}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} S_{0,5,0,8}\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}\right) & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $T_{2,4,6,8}(x)$  y  $S_{0,5,0,8}(x)$  son los números borrosos representados en la figura 1.1. En general, en esta memoria, vamos a utilizar la nomenclatura *función de soporte* para referirnos a los números borrosos en los que nos “apoyamos” para la definición de los cuantificadores.

El cuantificador semi-borroso **alrededor\_de\_5**: $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  se puede utilizar para denotar la semántica del determinante “*alrededor de 5*” (como por ejemplo en “*alrededor de 5 de los estudiantes son gallegos*”). El cuantificador semi-borroso **alrededor\_del\_80%o\_mas**: $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  representa la semántica del determinante “*alrededor del 80% o más*” (como en “*alrededor del 80% o más de los estudiantes son gallegos*”).

El siguiente ejemplo muestra como se puede utilizar el cuantificador **alrededor\_del\_80%o\_mas**( $Y_1, Y_2$ ) para evaluar una expresión cuantificada:

**Ejemplo 2** Consideremos la evaluación de la sentencia “*alrededor del 80% o más de los estudiantes son gallegos*” siendo el conjunto referencial  $E = \{e_1, \dots, e_5\}$  y los conjuntos nítidos asociados a las propiedades “*ser estudiante*” y “*ser gallego*” los siguientes:

$$Y_1 = \{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 1/e_4, 1/e_5\}, Y_2 = \{1/e_1, 0/e_2, 1/e_3, 1/e_4, 1/e_5\}$$

---

<sup>16</sup> “Fuzzy pre-determiners” en inglés.

Utilizando la expresión 1.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_mas}(Y_1, Y_2) \\
 &= S_{0,5,0,8} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) \\
 &= S_{0,5,0,8} \left( \frac{|\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 1/e_4, 1/e_5\} \cap \{1/e_1, 0/e_2, 1/e_3, 1/e_4, 1/e_5\}|}{|\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 1/e_4, 1/e_5\}|} \right) \\
 &= S_{0,5,0,8} \left( \frac{|\{1/e_1, 0/e_2, 0/e_3, 1/e_4, 1/e_5\}|}{|\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 1/e_4, 1/e_5\}|} \right) \\
 &= S_{0,5,0,8}(0,75) \\
 &= 0,94
 \end{aligned}$$

Al no aplicarse a conjuntos borrosos, los cuantificadores semi-borrosos eliminan las dificultades de especificación de los cuantificadores borrosos. Evidentemente, puede haber discrepancias acerca de la definición adecuada de un cuantificador semi-borroso (por ejemplo, utilizar otros parámetros en la función  $S$  de la definición de  $\mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_mas}(Y_1, Y_2) : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$ ). Pero aunque para la definición de un cuantificador semi-borroso se puedan plantear distintas alternativas, las “intuiciones lingüísticas” siguen siendo válidas por lo que nos es posible entender cuales son preferibles. Por este motivo, los cuantificadores semi-borrosos resultan un medio de especificación muy útil para representar las expresiones cuantificadas.

Glöckner [47, pág. 71] expone varias razones que destacan la utilidad de la definición de cuantificadores semi-borrosos. El primero y uno de los más importantes es que los cuantificadores semi-borrosos generalizan los cuantificadores nítidos utilizados en la TGQ. De esta manera es posible reutilizar el análisis de la cuantificación realizado en esta teoría. Además, la definición de “versiones suavizadas” de muchos de los cuantificadores nítidos utilizados en la TGQ (e.g. cuantificador  $\mathbf{al\_menos\_el80\%de\_los}(Y_1, Y_2) : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{2}$  en la expresión 1.4) se realiza de una manera muy sencilla (e.g. cuantificador semi-borroso de la expresión 1.6).

Otra de las grandes virtudes de los cuantificadores semi-borrosos es que al estar limitados al caso de argumentos nítidos no existen dificultades en el cálculo de las cardinalidades (absolutas, relativas, etc.) de los conjuntos argumento. Por ejemplo, la medida de cardinalidad relativa que se utiliza en la definición del cuantificador semi-borroso  $\mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_mas}(Y_1, Y_2) : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es fácilmente comprensible. En el caso borroso no existe una definición de cardinalidad universalmente aceptada, por lo que la definición de cuantificadores borrosos a partir de

medidas de cardinalidad borrosa presenta muchas dificultades en la práctica.

Un punto bastante evidente pero no menos importante es que la definición de cuantificadores semi-borrosos engloba los cuantificadores lingüísticos en el sentido de Zadeh. Nótese que el cuantificador semi-borroso **alrededor\_de\_5**( $Y_1, Y_2$ ) se define utilizando un número borroso absoluto por lo que se puede entender como una expresión más general de los cuantificadores de primera clase. Por su parte, el cuantificador semi-borroso **alrededor\_del\_80%o\_mas**( $Y_1, Y_2$ ) se define utilizando un número borroso proporcional por lo que se puede relacionar con los cuantificadores de segunda clase.

Además, los cuantificadores semi-borrosos también permiten manejar los ejemplos de cuantificación no cuantitativa de la TGQ. Y tampoco hacen ninguna hipótesis de finitud del dominio, como se realiza a veces en algunos modelos de cuantificación borrosa. De esta manera los cuantificadores semi-borrosos se convierten en el medio de especificación idóneo para representar el fenómeno de la cuantificación en lenguaje natural.

No obstante, es evidente que los cuantificadores semi-borrosos no solucionan el problema de la cuantificación borrosa, ya que sólo aceptan argumentos nítidos. La explicación del planteamiento realizado por Glöckner para solucionar este problema es el objetivo de la siguiente sección.

### 1.3.2. Mecanismos de borrosificación de cuantificadores

Hemos visto que los cuantificadores semi-borrosos constituyen un medio de especificación excelente para modelar la semántica de las expresiones cuantificadas. No obstante, para evaluar expresiones cuantificadas en las que intervienen argumentos borrosos, los cuantificadores semi-borrosos no tienen la potencia expresiva suficiente y es necesario recurrir a cuantificadores borrosos. Para superar la distancia existente entre el medio de especificación constituido por los cuantificadores semi-borrosos y el medio operacional constituido por los cuantificadores borrosos Glöckner propone la definición de mecanismos que nos permitan asociar cuantificadores borrosos a los cuantificadores semi-borrosos; esto es, permitimos que sean los cuantificadores semi-borrosos el medio para definir la semántica adecuada de las expresiones cuantificadas y delegamos el papel de la cuantificación borrosa en “ciertos mecanismos” que nos permitan transformar estos cuantificadores semi-borrosos en cuantificadores

borrosos adecuados. Su definición es la siguiente:

**Definición 4** [47, pág. 75] *Un mecanismo de borrosificación de cuantificadores (QFM)  $\mathcal{F}$  asigna a cada cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  su correspondiente cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  de la misma aridad  $n \in \mathbb{N}$  y sobre el mismo conjunto base  $E$ .*

De esta manera, los QFMs establecen el vínculo que falta entre los cuantificadores semi-borrosos y los cuantificadores borrosos. Para evaluar una sentencia cuantificada borrosa estableceremos, primero, un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  que represente una especificación adecuada de la situación que queremos modelar. Y para poder aplicar la especificación definida por  $Q$  a ciertos conjuntos borrosos  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  utilizaremos un QFM  $\mathcal{F}$  apropiado para construir el cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  asociado a  $Q$ . De este modo ya podemos calcular  $\mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n)$ .

Por ejemplo, para un QFM  $\mathcal{F}$  y los cuantificadores semi-borrosos **alrededor\_de\_5** :  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  y **alrededor\_del\_80%o\_más** :  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definidos en la expresión 1.6  $\mathcal{F}(\text{alrededor\_de\_5}) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  y  $\mathcal{F}(\text{alrededor\_del\_80\%o\_más}) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  son cuantificadores borrosos binarios capaces de manejar argumentos borrosos.

Con la definición de QFMs, Glöckner reescribe el problema de la cuantificación borrosa como el problema de definir QFMs de comportamiento apropiado. Para este propósito Glöckner establece cierto número de criterios (o propiedades) que permiten distinguir los QFMs de comportamiento aceptable.

En la definición de estos criterios Glöckner observa que muchas de las relaciones entre los cuantificadores analizadas en la TGQ (*negación, dualidad, monotonía, etc.*) se pueden generalizar a los casos semi-borroso y borroso. Por tanto, resulta apropiado requerir que los QFMs garanticen que las relaciones que se cumplen en el caso semi-borroso se trasladen al caso borroso<sup>17</sup>. Muchos de los criterios que utiliza Glöckner para definir el comportamiento adecuado de los QFMs se basan en la generalización de propiedades de la TGQ.

Pero al estar limitado al caso clásico la TGQ no es capaz de proporcionar todos los requerimientos exigibles en el caso borroso. Por esta razón Glöckner también

<sup>17</sup>Es decir, se busca que el espacio de cuantificadores semi-borrosos y el espacio de cuantificadores borrosos sean homomórficos para estas operaciones.

define una serie de criterios adicionales que no dependen de la TGQ pero que son necesarios desde el punto de vista borroso.

Además, Glöckner organiza estos criterios en dos grupos. El primer grupo está formado por las consecuencias de un marco axiomático que determina, según él, los criterios mínimos que se debe exigir a los QFMs, denominando a los modelos que verifican dicho marco axiomático *esquemas de borrosificación de determinantes* (DFSs)<sup>18</sup>. El segundo grupo contiene criterios adicionales que le permite realizar un análisis más preciso de los modelos que cumplen dicho marco axiomático. Estos criterios adicionales le ayudan a resolver problemas muy importantes, como es el de la diferenciación de “modelos prácticos” (esto es, útiles para las aplicaciones) de entre la clase de modelos que cumplen su marco. En el próximo apartado explicaremos en profundidad los criterios que permiten analizar el comportamiento de los QFMs.

En este punto nos parece muy importante señalar una diferencia fundamental entre la aproximación a la cuantificación basada en el marco tradicional de Zadeh y la aproximación planteada por Glöckner que puede pasar inadvertida. Mientras que Glöckner plantea un análisis global del marco de cuantificación, la aproximación de Zadeh plantea un análisis caso por caso que en general no es capaz de mantener la coherencia entre los distintos tipos de cuantificadores (absolutos unarios, absolutos binarios, proporcionales unarios, proporcionales binarios). Los cuantificadores utilizados por Glöckner son generales (ya sean semi-borrosos o borrosos) y su marco permite establecer de una manera clara y precisa las relaciones existentes entre distintos tipos de cuantificadores. Al separar el medio de especificación (cuantificadores semi-borrosos) del medio operacional (cuantificadores borrosos) es posible estudiar si los QFMs garantizan que las relaciones que se cumplen en el caso semi-borroso se trasladan al caso borroso. Por su parte, la casuística de Zadeh es particular, depende directamente de los números borrosos asociados a los cuantificadores y difícilmente permite establecer las relaciones que se cumplen entre los cuantificadores, al no ser los números borrosos el medio de especificación adecuado para esta tarea. Consideramos que a través de la definición de los QFMs Glöckner plantea el primer marco de cuantificación borrosa realmente susceptible al análisis crítico.

No podemos finalizar la explicación del marco de Glöckner basado en QFMs sin realizar antes algunas consideraciones acerca del poder expresivo del mismo. Antes de nada presentamos la definición de *cuantificador semi-borroso subyacente* a un

---

<sup>18</sup>Traducción de “Determiner fuzzification schemes” [41]. En esta memoria en general utilizaremos la sigla DFS para referirnos a los QFMs que verifican dicho marco axiomático.

cuantificador borroso:

**Definición 5** [47, pág. 77] Sea  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador borroso. El cuantificador semi-borroso subyacente  $\mathcal{U}(\tilde{Q}) : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define como

$$\mathcal{U}(\tilde{Q})(Y_1, \dots, Y_n) = Q(Y_1, \dots, Y_n)$$

para todas las  $n$ -tuplas  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  de conjuntos nítidos. De esta manera  $\mathcal{U}(\tilde{Q})$  simplemente ‘olvida’ que  $\tilde{Q}$  puede ser aplicado a conjuntos borrosos, y sólo considera su comportamiento en conjuntos nítidos.

La siguiente hipótesis establece el poder expresivo del marco de cuantificación basado en QFMs:

**Definición 6 (Hipótesis del marco de cuantificación (QFA):)** [47, pág. 77]<sup>19</sup> Si dos cuantificadores básicos de interés (i.e. cuantificadores del lenguaje natural a ser definidos directamente) tienen distintas interpretaciones  $\tilde{Q} \neq \tilde{Q}'$  como cuantificadores borrosos entonces también son distintos sobre conjuntos nítidos  $\mathcal{U}(\tilde{Q}) \neq \mathcal{U}(\tilde{Q}')$ .

Tal como se explica en [47, sección 2.7], el QFA asegura la aplicabilidad del marco basado en QFMs porque podemos representar dos cuantificadores borrosos  $\tilde{Q}$  y  $\tilde{Q}'$  por sus cuantificadores semi-borrosos asociados  $Q = \mathcal{U}(\tilde{Q})$  y  $Q' = \mathcal{U}(\tilde{Q}')$  sin comprometer la existencia de un QFM  $\mathcal{F}$  que lleve  $Q$  a  $\mathcal{F}(Q) = \tilde{Q}$  y  $Q'$  a  $\mathcal{F}(Q') = \tilde{Q}'$ . Esto es, si el marco fuese violado entonces sería posible encontrar dos cuantificadores borrosos  $\tilde{Q} \neq \tilde{Q}'$  tales que  $\mathcal{U}(\tilde{Q}) = \mathcal{U}(\tilde{Q}')$ . De esta manera ningún QFM  $\mathcal{F}$  podría diferenciar entre  $\tilde{Q}$  y  $\tilde{Q}'$  ya que al ser  $\mathcal{U}(\tilde{Q}) = \mathcal{U}(\tilde{Q}')$  entonces  $\mathcal{F}(\mathcal{U}(\tilde{Q})) = \mathcal{F}(\mathcal{U}(\tilde{Q}'))$ .<sup>20</sup>

Desde el punto de vista lingüístico, la QFA establece que no es posible que dos cuantificadores de lenguaje natural puedan tener la misma interpretación sobre conjuntos clásicos pero distinta sobre conjuntos borrosos. Parece difícil pensar que el lenguaje natural pueda contener dos expresiones  $exp$  y  $exp'$  tales que las mismas

<sup>19</sup>En inglés, “Quantification framework assumption”

<sup>20</sup>La hipótesis del marco de cuantificación puede parecer confusa pero es muy importante, por lo que damos a continuación un ejemplo en el que la misma es violada. Consideremos dos cuanti-

tengan el mismo significado cuando se aplican a expresiones nítidas pero distinto cuando se aplican a expresiones borrosas.

Aunque la QFA parece incuestionable, tal como se explica en [47, sección 2.7], el lenguaje natural es de propósito general y nos permite definir prácticamente lo que queramos. Por este motivo es por lo cual el autor restringe la QFA a ciertos “cuantificadores básicos”; esto es, a cuantificadores que no excedan cierta complejidad, tales como los asociados a los determinantes presentados en la sección 1.2. Intuitivamente, la especificación de la semántica de los mismos por medio de cuantificadores semi-borrosos parece más que suficiente.

No entraremos en más profundidad en esta cuestión ya que esta hipótesis sólo es violada por cuantificadores muy particulares que no nos parecen nada relevantes desde el punto de vista de las aplicaciones (piénsese que al ser el lenguaje natural de “propósito general” nos permite expresar el significado de cuantificadores borrosos como los que se definen en la nota a pie de la página 33). En todo caso, aconsejamos al lector consultar la excelente exposición realizada en [47, sección 2.7] para más información acerca de la hipótesis del marco de evaluación.

## 1.4. Propiedades de los QFMs

Una vez que hemos contextualizado la aproximación a la cuantificación borrosa que vamos a seguir en esta memoria, expondremos un conjunto de propiedades o criterios que nos permitirán analizar el comportamiento de los QFMs. Este conjunto de propiedades constituirá la base que nos permitirá analizar, de manera crítica, tanto los modelos de cuantificación que planteamos en esta memoria, como las distintas propuestas que encontramos en la bibliografía.

ficadores borrosos  $\tilde{Q}, \tilde{Q}' : \tilde{\mathcal{P}}(\{e_1, e_2, e_3\}) \rightarrow \mathbf{I}$  definidos como

$$Q(X) = \frac{\sum_{i=1}^3 \mu_X(e_i)}{3}$$

$$Q'(X) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^3 \mu_X(e_i)}{3} & : X \in \mathcal{P}(E) \\ 0 & : X \notin \mathcal{P}(E) \end{cases}$$

Esto es,  $Q'(X) = 0$  si  $X$  no es un conjunto clásico. Se cumple que  $\mathcal{U}(\tilde{Q}) = \mathcal{U}(\tilde{Q}')$  (i.e.,  $Q$  y  $Q'$  son iguales en conjuntos clásicos) pero ningún QFM puede relacionar un mismo cuantificador semi-borroso con dos cuantificadores borrosos distintos.

La mayoría de estas propiedades han sido extraídas de las planteadas por Glöckner en [47]<sup>21</sup>. Además de éstas, hemos considerado también dos propiedades de mucha relevancia práctica que son verificadas por los modelos probabilísticos que definiremos en el capítulo 3.

Hemos dividido las propiedades en dos grupos principales. En el primero recogemos las propiedades más importantes derivadas del marco axiomático de los DFSs [47, capítulo 4]. En el segundo consideramos algunas de las propiedades que se plantean en [47, capítulo 6] para realizar un análisis más fino de los QFMs, así como las dos propiedades adicionales que acabamos de citar.

Una vez hayamos finalizado la explicación del grupo de propiedades derivadas del marco de los DFSs presentaremos el mismo. Dicho marco establece, según Glöckner, el conjunto mínimo de criterios exigibles a un QFM [45, 47, 50]. El mencionado marco es un refinamiento de su propuesta inicial realizada en [41, pag. 22].

Las propiedades que hemos incluido en el segundo grupo son en general de mucho interés para las aplicaciones, pero su exigencia para todo QFM podría limitar en gran medida el conjunto de modelos admisibles. Veremos que alguna de ellas incluso entra en contradicción con el marco axiomático de los DFSs.

El planteamiento de la mayoría de las propiedades se basa en el profundo estudio de la cuantificación en el lenguaje natural realizada en la TGQ. En esta teoría se ha realizado un análisis bastante exhaustivo del comportamiento de los cuantificadores. Y para los casos que nos van a interesar, las relaciones, o comportamientos, analizadas en la TGQ se mantienen cuando saltamos del caso nítido al caso semi-borroso.

Puesto que, como veremos, es fácil generalizar las relaciones analizadas en la TGQ al caso borroso, resulta muy interesante estudiar si las propiedades que se cumplen para un cierto cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se mantienen en el caso borroso  $\mathcal{F}(Q) : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  a través de la aplicación del QFM  $\mathcal{F}$ .

Por otra parte, cierto número de propiedades no se pueden derivar directamente del análisis de la cuantificación realizada en la TGQ. En este grupo encontramos desde propiedades inherentemente borrosas a cierto número de criterios “más prácti-

---

<sup>21</sup>La mayoría del material que se presenta en este apartado se deriva de la exposición realizada en [47, capítulos 4 y 6]. Esta exposición es fundamental para el desarrollo del resto de la memoria, pero sólo pretende ser un resumen suficiente del trabajo desarrollado en la referencia citada. Aconsejamos al lector consultar el excelente trabajo planteado en la referencia anterior para más información acerca de las propiedades que se utilizan para estudiar el comportamiento de los QFMs.

cos”, sin interés desde el punto de vista del lenguaje pero muy importantes desde el punto de vista de la utilización de la cuantificación en la práctica. En general, la definición de estas propiedades también se basa en el estudio de la preservación del comportamiento de los cuantificadores semi-borrosos a través la aplicación de los QFMs.

Antes de comenzar la explicación del conjunto de propiedades que se van a utilizar para definir el comportamiento de los QFMs, nos gustaría realizar una observación importante acerca del marco axiomático de los DFSs. Pese a que Glöckner considera que su marco axiomático define el conjunto mínimo de requisitos a ser cumplidos por un QFM, su idoneidad resulta por lo menos cuestionable. Aunque el grado de refinamiento de dicho marco axiomático es realmente notable, el mismo excluye dos de los modelos presentados en esta memoria que, como veremos, presentan un comportamiento teórico y práctico más que adecuado. Además, en el apartado de revisión bibliográfica se mostrará que los tres modelos paradigmáticos de QFMs que verifican el marco axiomático de los DFSs planteados por Glöckner en [45, 47]<sup>22</sup>, todos ellos de comportamiento teórico envidiable, presentan ciertos comportamientos realmente problemáticos para muchas de las aplicaciones en las que se ha propuesto el uso de la cuantificación borrosa.

### 1.4.1. Propiedades derivadas del marco de los DFSs

Antes de pasar a su definición formal y descripción detallada, describiremos muy sucintamente el conjunto de propiedades que vamos a considerar. La propiedad de *generalización correcta* es posiblemente la propiedad más importante a ser cumplida por un QFM. Establece que los cuantificadores borrosos resultantes de la aplicación de los QFMs se deben comportar adecuadamente en el caso nítido. La propiedad de *cuantitatividad* garantiza que las permutaciones arbitrarias del universo de referencia no afectan a los cuantificadores cuantitativos. Las propiedades del *valor inducido*, de las *funciones de verdad inducidas* y de *coherencia con la lógica* garantizan que los QFMs generalizan adecuadamente las operaciones lógicas clásicas. El cumplimiento de la propiedad de *trasposición de argumentos* garantiza que los cuantificadores borrosos manejan adecuadamente las permutaciones de los argumentos. Las pro-

---

<sup>22</sup>Estos modelos son considerados paradigmáticos por el autor en el sentido de su utilidad para las aplicaciones. Actualmente son los únicos modelos para los cuales el autor ha propuesto soluciones algorítmicas.

propiedades de *negación externa*, *interna* y *dualidad* garantizan que las relaciones de negación que se cumplen en el caso nítido se trasladan al borroso. La propiedad de *las uniones y las intersecciones* asegura que las intersecciones y uniones de los conjuntos argumento se trasladan adecuadamente al caso borroso. Las propiedades de *monotonía en los argumentos* y de *monotonía en los cuantificadores* garantizan la preservación de las propiedades de monotonía de los cuantificadores semi-borrosos. La propiedad de *inserción de argumentos* garantiza que la construcción de un cuantificador semi-borroso de menor aridad por inserción de un argumento nítido (esto es, un cuantificador de aridad  $n$  se transforma en uno de aridad  $n - 1$  evaluando el mismo sobre un único argumento) tiene una contrapartida adecuada en el caso borroso. Y para finalizar, la propiedad de *compatibilidad con la aplicación funcional*, está muy relacionada con el principio de extensión, y garantiza que los cuantificadores se comportan adecuadamente ante los cambios de universo de referencia.

### Generalización correcta

La propiedad de generalización correcta es posiblemente la más fundamental de las propiedades exigibles a un QFM. Su cumplimiento por parte de un QFM  $\mathcal{F}$  garantiza que el comportamiento del cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q)$  asociado al cuantificador semi-borroso  $Q$  es el esperable en el caso clásico.

Esta propiedad ha sido propuesta independientemente en [41, pág. 27] y [80, págs. 74.]<sup>23</sup>. Tanto en [47, secciones 3.2. y 4.2.] como en [41] la restricción de esta propiedad al caso unario forma parte de los axiomas utilizados para caracterizar a los DFSs. Se puede consultar [47, secciones 3.2. y 4.2.] para una descripción más detallada acerca de la misma.

La definición de la propiedad de generalización correcta es la siguiente:

**Definición 7 (Propiedad de generalización correcta)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso  $n$ -ario. Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de generalización correcta si  $\mathcal{U}(\mathcal{F}(Q)) = Q$ ; esto es, para todos los conjuntos nítidos

<sup>23</sup>Las definiciones utilizadas en [80] se restringen a los casos de cuantificadores unarios y binarios asociados a los cuantificadores de primera y segunda clase propuestos por Zadeh [103].

$Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ , se cumple que<sup>24</sup>

$$\mathcal{F}(Q)(Y_1, \dots, Y_n) = Q(Y_1, \dots, Y_n)$$

### Consecuencias de la propiedad.

Sea  $E$  un referencial de individuos e  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  dos conjuntos nítidos ( $Y_1$  podría representar la propiedad “*ser estudiante*” e  $Y_2$  la propiedad “*ser gallego*” por ejemplo). Entonces el cumplimiento de la propiedad de generalización correcta garantiza que

$$\mathcal{F}(\text{alrededor\_del\_80\%o\_más})(Y_1, Y_2) = \text{alrededor\_del\_80\%o\_más}(Y_1, Y_2)$$

Esto es, para conjuntos clásicos el resultado que obtenemos al evaluar el cuantificador borroso  $\mathcal{F}(\text{alrededor\_del\_80\%o\_más})$  sobre los conjuntos  $Y_1, Y_2$  es el mismo que el que obtenemos al evaluar, directamente, el cuantificador semi-borroso **alrededor\\_del\\_80\%o\\_más** sobre dichos conjuntos.

Pese a ser una propiedad muy intuitiva, muchos de las aproximaciones recogidas en la bibliografía violan esta propiedad. Véase la sección 1.5 para más información.

### Propiedad de cuantitatividad

Intuitivamente, los cuantificadores cuantitativos son aquellos que dependen, de alguna manera, de las cardinalidades de los conjuntos argumento, mientras que los no cuantitativos no se pueden expresar únicamente en función de estas cardinalidades.

Aunque en la TGQ el tratamiento de los cuantificadores no cuantitativos es habitual, en el campo de los conjuntos borrosos ha sido Glöckner el primero en considerar este tipo de cuantificadores [41, pág. 3]. Un ejemplo muy básico de cuantificador no cuantitativo es

$$\mathbf{Pedro}(Y) = \begin{cases} 0 & : \text{Pedro} \notin Y \\ 1 & : \text{Pedro} \in Y \end{cases}$$

que se puede utilizar, por ejemplo, para evaluar la sentencia “*Pedro es español*”. El cuantificador **Pedro**( $Y$ ) no depende de la cardinalidad del conjunto argumento  $Y$ , sino de si el elemento particular *Pedro* pertenece a  $Y$ .

<sup>24</sup>Nótese que  $\mathcal{U}(\mathcal{F}(Q))$  es simplemente el cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q)$  restringido a conjuntos nítidos; esto es,  $\mathcal{F}(Q)$  restringido a  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  (véase la definición 5).

Para poder definir los cuantificadores cuantitativos necesitamos la siguiente definición:

**Definición 8 (Extensión de una función a conjuntos)** Sea  $\beta : E \rightarrow S$  una función cualquiera. A partir de  $\beta$  se define la función  $\widehat{\beta} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(S)$  de la siguiente manera

$$\widehat{\beta}(Y) = \{\beta(e) : e \in Y\}$$

A continuación se plantea la definición de cuantificadores cuantitativos que se da en [47, pág. 138]:

**Definición 9 (Cuantificadores cuantitativos)** [47, pág. 138] Un cuantificador se-mi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se denomina cuantitativo si y sólo si para todos los automorfismos (biyecciones de  $E$  en  $E$ )  $\beta : E \rightarrow E$  y todos los conjuntos  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  nítidos se cumple

$$Q(Y_1, \dots, Y_n) = Q(\widehat{\beta}(Y_1), \dots, \widehat{\beta}(Y_n))$$

Similarmente,

**Definición 10** [47, pág. 138] Un cuantificador borroso  $\widetilde{Q} : \widetilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se dice cuantitativo si y sólo si para todos los automorfismos  $\beta : E \rightarrow E$  y todos los conjuntos  $X_1, \dots, X_n \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  borrosos se cumple

$$\widetilde{Q}(X_1, \dots, X_n) = Q(\widehat{\beta}(X_1), \dots, \widehat{\beta}(X_n))$$

donde  $\widehat{\beta} : \widetilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  se construye utilizando el principio de extensión estándar (nótese que al ser  $\beta$  una biyección  $\widehat{\beta}$  define simplemente una permutación de los grados de pertenencia).

El siguiente teorema [47, pág. 299] establece que todo cuantificador semi-borroso cuantitativo puede evaluarse a partir de las cardinalidades de las combinaciones booleanas de los conjuntos argumento. Introducimos aquí este resultado porque resulta de mucho interés tanto para el desarrollo de la clasificación de cuantificadores semi-borrosos desarrollada en el capítulo 4, como para el estudio de las soluciones algorítmicas asociadas a los QFMs definidos en esta memoria que se ha realizado en el apéndice B:

**Teorema 3** [47, pág. 299] *Un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base  $E \neq \emptyset$  finito es cuantitativo si y sólo si  $Q$  se puede calcular a partir de las cardinalidades de sus argumentos y sus combinaciones booleanas, i.e., existen  $K \in \mathbb{N}$  expresiones booleanas  $\Phi_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, \Phi_K(Y_1, \dots, Y_n)$  tales que*

$$Q(Y_1, \dots, Y_n) = q(\Phi_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, \Phi_K(Y_1, \dots, Y_n))$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ .<sup>25</sup>

La siguiente propiedad se define a partir del Teorema 25 de [47, pág. 139].

**Definición 11 (Propiedad de cuantitatividad)** *Sea  $\mathcal{F}$  un QFM. Diremos que  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de cuantitatividad si para todo cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se cumple que  $Q$  es cuantitativo si y sólo si  $\mathcal{F}(Q)$  es cuantitativo.*

### Consecuencias de la propiedad.

Esta propiedad asegura que si un cuantificador semi-borroso es cuantitativo, entonces también lo es el cuantificador borroso correspondiente. Por ejemplo, consideremos el cuantificador **algún**:  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$

$$\mathbf{algún}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \\ 1 & : Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Este cuantificador es cuantitativo, ya que no se ve afectado por permutaciones en el orden de los elementos del referencial. Por ejemplo, para  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $\beta : E \rightarrow E$  tal que

$$\beta(e_1) = e_2, \beta(e_2) = e_3, \beta(e_3) = e_1$$

tenemos que

$$\mathbf{algún}(\{e_1, e_2\}, \{e_2, e_3\}) = \mathbf{algún}(\{e_2, e_3\}, \{e_3, e_1\}) = 1$$

Como consecuencia del cumplimiento de esta propiedad,  $\mathcal{F}(\mathbf{algún})$  también es cuantitativo.

---

<sup>25</sup>Por simplicidad se ha suprimido una parte del teorema que no es de interés para esta memoria.

### Valor de verdad inducido

Esta propiedad está relacionada con la evaluación del grado de verdad de un elemento particular [47, sección 3.3.]. La propiedad, tal como la vamos a enunciar, forma parte del conjunto de axiomas que caracterizan a los DFSs tanto en [41] como en [47].

En el caso clásico, podemos definir un cuantificador  $\pi_e : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$  que comprueba si el elemento  $e$  pertenece al conjunto argumento. De igual manera, en el caso borroso podemos definir un cuantificador borroso  $\tilde{\pi}_e : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  que devuelve el grado de verdad del elemento  $e$  en el conjunto argumento. Es natural requerir que la imagen del cuantificador clásico  $\pi_e$  a través de un QFM sea  $\tilde{\pi}_e$ .

Las definiciones formales de los cuantificadores  $\pi_e$  y  $\tilde{\pi}_e$  son:

**Definición 12** [47, pág. 93] Sea  $E$  un conjunto referencial y  $e \in E$ . El cuantificador de proyección  $\pi_e : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$  se define como

$$\pi_e(Y) = \chi_Y(e) \quad (1.7)$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$ .

La definición correspondiente en el caso borroso es:

**Definición 13** [47, pág. 94] Sea  $E$  un conjunto referencial y  $e \in E$ . El cuantificador de proyección borroso  $\tilde{\pi}_e : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{2}$  se define como

$$\tilde{\pi}_e(Y) = \chi_Y(e)$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$ .

A partir de las definiciones anteriores se establece la propiedad que garantiza que un QFM generaliza el cuantificador  $\pi_e$  adecuadamente:

**Definición 14 (Generalización del cuantificador de proyección)** [47, pág. 94, pág. 110] Sea  $\mathcal{F}$  un QFM. Diremos que  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de generalización del cuantificador de proyección si se cumple que

$$\mathcal{F}(\pi_e) = \tilde{\pi}_e$$

para  $E \neq \emptyset$  y  $e \in E$ .

### Consecuencias de la propiedad.

Por ejemplo, si  $Pedro \in E$  entonces

$$\mathcal{F}(\pi_{Pedro})(\mathbf{alto}) = \mu_{\mathbf{alto}}(Pedro)$$

### Funciones de verdad inducidas

Muchas de las propiedades que se presentan en este apartado son generalizaciones de propiedades que se cumplen en el caso clásico (por ejemplo, las propiedades de *negación externa*, *interna* y *dualidad* que veremos en breve). En la definición binaria de la mayoría de estas propiedades intervienen operaciones conjuntistas (i.e., complementos, uniones, intersecciones) que deben ser sustituidas por sus análogos borrosas en su generalización al caso continuamente valuado [47, sección 3.4.].

Una posibilidad para llevar a cabo esta generalización es elegir un conjunto de funciones lógicas borrosas (i.e., una función de negación, una tnorma, una tconorma, etc.) y utilizarlas para definir las análogas borrosas de las relaciones que se cumplen en el caso semi-borroso. Pero esta decisión, además de arbitraria, restringiría de alguna manera los QFMs adecuados a aquellos compatibles con las operaciones elegidas.

En [41,45,47] las distintas propiedades de interés se definen utilizando operadores lógicos compatibles, en cierta manera, con el QFM  $\mathcal{F}$  en cuestión. Para ello, en estos trabajos se plantean dos construcciones que permiten asociar a las operaciones lógicas binarias (i.e., identidad, negación, conjunción, disyunción, etc.) sus análogas multivaluadas derivadas de la aplicación de  $\mathcal{F}$ . Las operaciones lógicas *inducidas* por un QFM coinciden para ambas construcciones cuando éste es un DFS.

Veremos que la utilización de las funciones de verdad inducidas en la definición de los criterios de adecuación de los QFMs busca que estos sean consistente en si mismos; es decir, que sean coherentes con las relaciones definidas a través de las funciones de verdad que inducen.

Planteamos a continuación los mecanismos mencionados. El primero es el utilizado en [41, sección 1]. En [47, capítulo 3] se puede encontrar la definición de ambos.<sup>26</sup>

### Mecanismo a).

---

<sup>26</sup>La exposición de los mecanismos es casi textual.

La construcción que expondremos a continuación puede encontrarse en [47, sección 4.4]. Esta construcción se basa en la observación de que (a) el conjunto de valores de verdad nítidos  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$  y el conjunto de partes de  $\{*\}$  ( $\mathcal{P}(\{*\})$ ) son isomorfos; y (b) el conjunto de valores de verdad  $\mathbf{I} = [0, 1]$  y las partes borrosas de  $\{*\}$  ( $\tilde{\mathcal{P}}(\{*\})$ ) también son isomorfos, donde  $\{*\}$  es un conjunto arbitrario unitario, e.g.  $\{*\} = \{\emptyset\}$ . Las funciones que permiten establecer estos isomorfismos son las biyecciones (a)  $\pi_* : \mathcal{P}(\{*\}) \rightarrow \mathbf{I}$ ; y (b)  $\tilde{\pi}_* : \tilde{\mathcal{P}}(\{*\}) \rightarrow \mathbf{I}$ . La idea básica es utilizar la biyección  $\pi_* : \mathcal{P}(\{*\}) \rightarrow \mathbf{I}$  para transformar las funciones de verdad iniciales en cuantificadores semi-borrosos, a los cuales podemos aplicar el QFM  $\mathcal{F}$ . Y después, utilizando la inversa de la biyección  $\tilde{\pi}_* : \tilde{\mathcal{P}}(\{*\}) \rightarrow \mathbf{I}$ , podemos convertir el cuantificador borroso resultante de aplicar  $\mathcal{F}$  en la función de verdad deseada. Formalmente, esta construcción es la siguiente:

**Definición 15** [47, pág. 122] Sea  $f : \mathbf{2}^n \rightarrow \mathbf{I}$  una función cualquiera. Podemos ver  $f$  como un cuantificador semi-borroso  $f^* : \mathcal{P}(\{*\})^n \rightarrow \mathbf{I}$  definiendo

$$f^*(Y_1, \dots, Y_n) = f(\pi_*(Y_1), \dots, \pi_*(Y_n))$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(\{*\})$ . Aplicando el QFM considerado  $\mathcal{F}$ ,  $f^*$  se generaliza a un cuantificador borroso  $\mathcal{F}(f^*) : \tilde{\mathcal{P}}(\{*\})^n \rightarrow \mathbf{I}$ , a partir del cual podemos obtener una función de verdad borrosa  $\tilde{\mathcal{F}}(f) : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ ,

$$\tilde{\mathcal{F}}(f)(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}(f^*)(\tilde{\pi}_*^{-1}(x_1), \dots, \tilde{\pi}_*^{-1}(x_n))$$

para todo  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{I}$ .

**Ejemplo 4** Considérese la función de verdad  $\wedge : \mathbf{2}^2 \rightarrow \mathbf{2}$  definida como

$$\wedge(0, 0) = \wedge(0, 1) = \wedge(1, 0) = 0, \wedge(1, 1) = 1$$

A partir de esta función construimos el cuantificador semi-borroso  $\wedge^* : \mathcal{P}(\{*\})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

$$\begin{aligned} \wedge^*(\emptyset, \emptyset) &= \wedge(\pi_*(\emptyset), \pi_*(\emptyset)) = \wedge(0, 0) = 0 \\ \wedge^*(\emptyset, \{*\}) &= \wedge(\pi_*(\emptyset), \pi_*(\{*\})) = \wedge(0, 1) = 0 \\ \wedge^*(\{*\}, \emptyset) &= \wedge(\pi_*(\{*\}), \pi_*(\emptyset)) = \wedge(1, 0) = 0 \\ \wedge^*(\{*\}, \{*\}) &= \wedge(\pi_*(\{*\}), \pi_*(\{*\})) = \wedge(1, 1) = 1 \end{aligned}$$

Y a partir del cuantificador semi-borroso  $\wedge^* : \mathcal{P}(\{*\})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  construimos la función de verdad inducida por el mecanismo

$$\tilde{\mathcal{F}}(\wedge)(x_1, x_2) = \mathcal{F}(\wedge^*)(\tilde{\pi}_*^{-1}(x_1), \tilde{\pi}_*^{-1}(x_2))$$

Nótese que  $\tilde{\pi}_*^{-1}(x) = \{x/*\}$ .

### Mecanismo b).

Esta construcción se puede encontrar en [47, sección 3.4]. Para la definición de este mecanismo se debe observar que  $\mathbf{2}^n$  es isomorfo a  $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ , utilizando la biyección  $\eta : \mathbf{2}^n \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$  definida por

$$\eta(x_1, \dots, x_n) = \{k \in \{1, \dots, n\} : x_k = 1\}$$

para todo  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{2}$ . En el caso borroso es posible realizar una construcción análoga, donde  $\mathbf{I}^n$  es isomorfo a  $\tilde{\mathcal{P}}(\{1, \dots, n\})$  utilizando la biyección  $\tilde{\eta} : \mathbf{I}^n \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\{1, \dots, n\})$  definida por

$$\mu_{\tilde{\eta}(x_1, \dots, x_n)}(k) = x_k$$

para todo  $x_1, \dots, x_n$  y  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Estas biyecciones se pueden utilizar para transformar funciones de verdad semi-borrosas (i.e. funciones de  $\mathbf{2}^n \rightarrow \mathbf{I}$ ) en sus correspondientes cuantificadores semi-borrosos  $Q_f : \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbf{I}$ , los cuales implementan las funciones de verdad proposicionales en cuantificadores semi-borrosos. De la misma manera, se pueden transformar cuantificadores borrosos  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbf{I}$  en funciones de verdad borrosas  $\tilde{f} : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ , las cuales implementan la transformación inversa requerida.

**Definición 16** [47, pág. 96] Sea  $\mathcal{F}$  un QFM y  $f : \mathbf{2}^n \rightarrow \mathbf{I}$  una función (i.e. una ‘función de verdad semi-borrosa’) para algún  $n \in \mathbb{N}$ . El cuantificador semi-borroso  $Q_f : \tilde{\mathcal{P}}(\{1, \dots, n\}) \rightarrow \mathbf{I}$  se define como

$$Q_f(Y) = f(\eta^{-1}(Y))$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ . En términos de  $Q_f$  la función de verdad inducida  $\tilde{\mathcal{F}}(f) : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define por

$$\tilde{\mathcal{F}}(f)(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\mathcal{F}}(Q_f)(\eta^{-1}(x_1, \dots, x_n))$$

para todo  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{I}$ .

**Ejemplo 5** *Considérese la misma función de verdad  $\wedge : \mathbf{2}^2 \rightarrow \mathbf{2}$  que en el ejemplo 4:*

$$\wedge(0,0) = \wedge(0,1) = \wedge(1,0), \wedge(1,1) = 1$$

*A partir de esta función construimos el cuantificador semi-borroso  $Q_\wedge : \mathcal{P}(\{1,2\}) \rightarrow \mathbf{I}$  definido como*

$$\begin{aligned} Q_\wedge(\emptyset) &= \wedge(\eta^{-1}(\emptyset)) = \wedge(0,0) = 0 \\ Q_\wedge(\{1\}) &= \wedge(\eta^{-1}(\{1\})) = \wedge(1,0) = 0 \\ Q_\wedge(\{2\}) &= \wedge(\eta^{-1}(\{2\})) = \wedge(0,1) = 0 \\ Q_\wedge(\{1,2\}) &= \wedge(\eta^{-1}(\{1,2\})) = \wedge(1,1) = 1 \end{aligned}$$

*Y a partir del cuantificador semi-borroso  $Q_\wedge : \mathcal{P}(\{1,2\}) \rightarrow \mathbf{I}$  construimos la función de verdad borrosa inducida por el mecanismo*

$$\tilde{\mathcal{F}}(\wedge)(x_1, x_2) = \mathcal{F}(Q_f)(\tilde{\eta}(x_1, x_2))$$

Nótese la diferencia entre la aplicación del mecanismo a) y la del mecanismo b) para construir las funciones de verdad inducidas. Para construir la función inducida por un QFM  $\mathcal{F}$  de una función proposicional semi-borrosa  $f : \mathbf{2}^n \rightarrow \mathbf{I}$  utilizando el primer mecanismo nos apoyaremos en un cuantificador semi-borroso binario  $Q : \mathcal{P}(\{*\})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  mientras que si utilizamos el segundo mecanismo nos apoyaremos en un cuantificador semi-borroso unario  $Q : \mathcal{P}(\{1,2\}) \rightarrow \mathbf{I}$ .

En general denotaremos por  $\tilde{\neg}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\Rightarrow}$  las funciones de verdad inducidas por un QFM. Cuando las funciones de verdad inducidas por un QFM sean distintas dependiendo del mecanismo utilizado en su construcción lo indicaremos explícitamente.

Las operaciones inducidas sobre conjuntos borrosos, i.e. complemento borroso  $\tilde{\neg} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(E)$ , intersección borrosa  $\tilde{\cap} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(E)$ , unión borrosa  $\tilde{\cup} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(E)$ , se pueden definir aplicando a los elementos individuales  $e \in E$  las operaciones de verdad inducidas  $\tilde{\neg} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\wedge} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\vee} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ , respectivamente. Por ejemplo, el complemento inducido  $\tilde{\neg}X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  de  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  se define como

$$\mu_{\tilde{\neg}X}(e) = \tilde{\neg}\mu_X(e)$$

para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  y  $e \in E$ .

A partir de las definiciones anteriores definimos la siguiente propiedad adecuada para los esquemas de borrosificación de cuantificadores semi-borrosos.

**Definición 17 (Propiedad de operaciones inducidas)** Sea  $\mathcal{F}$  un QFM. Diremos que  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de operaciones inducidas si se cumple

a.  $\widetilde{id}_1 = \widetilde{\mathcal{F}}(id_2)$  es la función de verdad identidad.

b.  $\widetilde{\neg} = \widetilde{\mathcal{F}}(\neg)$  es un operador de negación fuerte.

c.  $\widetilde{\wedge} = \widetilde{\mathcal{F}}(\wedge)$  es una tnorma.

d.  $\widetilde{\vee} = \widetilde{\mathcal{F}}(\vee)$  es una tconorma.

e.  $\widetilde{\rightarrow} = \widetilde{\mathcal{F}}(\rightarrow)$  es una función de implicación.

donde  $\neg, \wedge, \vee$  y  $\rightarrow$  denotan respectivamente las funciones de negación, conjunción, disyunción e implicación clásicas, e  $id_2 : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$  la función identidad bivaluada.

En la definición de la propiedad se ha utilizado el mecanismo b) para la construcción de funciones de verdad inducidas. La definición para el mecanismo a) es análoga. En el análisis de propiedades de los modelos se estudiarán ambas alternativas.

### Consecuencias de la propiedad.

Por ejemplo, si  $E = \{Pedro\}$ ,  $X_1 = \{0,7/Pedro\}$  (e.g., la medida en que *Pedro* es alto) y  $X_2 = \{0,4/Pedro\}$  (e.g., la medida en la que *Pedro* es rubio), entonces

$$\mathcal{F}(\cap)(X_1, X_2) = \widetilde{\mathcal{F}}(\wedge)(0,7,0,4)$$

es la medida en que *Pedro* es alto y rubio.

### Propiedad de trasposición de argumentos

La propiedad de trasposición de argumentos formaba parte del conjunto original de axiomas planteados en [41] para caracterizar los DFSs. Su interés principal reside en que permite caracterizar algunas propiedades de simetría de los cuantificadores.

La exposición de esta propiedad es un resumen de la planteada en [47].

**Definición 18 (Permutación de argumentos)** [47, pág. 123] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso y  $\beta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  una permutación. Por  $Q\beta : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  denotamos el cuantificador semi-borroso definido como

$$Q\beta(Y_1, \dots, Y_n) = Q(Y_{\beta(1)}, \dots, Y_{\beta(n)})$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ . En el caso de cuantificadores borrosos  $\widetilde{Q}\beta : \widetilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define análogamente.

A continuación se introduce la definición de trasposición realizada en [47, pág. 124], que nos permitirá reescribir las permutaciones de una manera más adecuada (nótese que cualquier permutación se puede expresar como composición de trasposiciones).

**Definición 19 (Trasposición)** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ) e  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , la trasposición  $\tau_{i,j} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  se define como

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} i & : k = j \\ j & : k = i \\ k & : k \neq j \wedge k \neq i \end{cases}$$

para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Además, por  $\tau_i$  se abreviará la permutación  $\tau_{i,n}$  (que intercambia las posiciones de  $i$  y  $n$ ). Nótese que  $\tau_{i,j} = \tau_i \circ \tau_j \circ \tau_i$ .

La definición análoga a la definición 19 es la siguiente:

**Definición 20 (Trasposición de argumentos)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $n > 0$ . Por  $Q\tau_i : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  denotamos el cuantificador semi-borroso definido como

$$Q\tau_i(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n) = Q(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_n, Y_{i+1}, \dots, Y_i)$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ . En el caso de cuantificadores borrosos  $\tilde{Q}\tau_i : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define análogamente.

A partir de las definiciones anteriores se establece la propiedad que garantiza que un QFM generaliza las trasposiciones de argumentos adecuadamente:

**Definición 21 (Propiedad de trasposición de argumentos)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso. Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de trasposición de argumentos si

$$\mathcal{F}(Q\tau_i) = \mathcal{F}(Q)\tau_i$$

### Consecuencias de la propiedad.

Debido a que las permutaciones se pueden expresar como una secuencia de trasposiciones, esta propiedad garantiza que el QFM conmuta con la permutación arbitraria de argumentos del cuantificador. En particular, se garantiza que las propiedades de simetría sobre  $Q$  se trasladan a  $\mathcal{F}(Q)$ . Por ejemplo, si  $\mathcal{F}$  es un QFM que garantiza esta propiedad, entonces  $\mathcal{F}(\mathbf{algún})(altos, rubios) = \mathcal{F}(\mathbf{algún})(rubios, altos)$  siendo *altos* y *rubios* propiedades borrosas, ya que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{algún})(altos, rubios) &= \mathcal{F}(\mathbf{algún}\tau_2)(altos, rubios) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{algún})\tau_2(altos, rubios) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{algún})(rubios, altos)\end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned}\mathbf{algún}(Y_1, Y_2) &= \mathbf{algún}(Y_2, Y_1) \\ &= \mathbf{algún}\tau_2(Y_1, Y_2)\end{aligned}$$

### Propiedad de negación externa

A partir de la negación borrosa inducida y del complemento borroso inducido se van a definir tres propiedades muy importantes desde el punto de vista lingüístico: *la propiedad de negación externa*, *la propiedad de negación interna* y *la propiedad de dualidad*.

Aunque estas propiedades han sido contempladas habitualmente en la TGQ, sólo recientemente han recibido un tratamiento adecuado desde el punto de vista borroso [41, 47]. No obstante, el interés del cumplimiento de las propiedades de negación externa e interna ha sido evidente desde los primeros trabajos de Zadeh [103].

La propiedad de negación externa formaba parte del conjunto inicial de axiomas utilizado para caracterizar los DFSs en [41].

La definición de la propiedad de negación externa [47, Sección 3.5] es la siguiente:

**Definición 22 (Negación externa)** [47, Pág. 97] *La negación externa de un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define como*

$$(\tilde{\neg}Q)(Y_1, \dots, Y_n) = \tilde{\neg}(Q(Y_1, \dots, Y_n))$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ . La definición de  $\tilde{\sim}Q : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  en el caso de cuantificadores borrosos  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  es análoga.

Desde el punto de vista lingüístico, la negación externa de “*todos los estudiantes son españoles*” es “*no todos los estudiantes son españoles*”.

Un QFM generaliza la propiedad de negación externa de forma adecuada si se cumple la siguiente propiedad, equivalente al axioma de *negación externa* definido en [41, pág. 22]:

**Definición 23 (Propiedad de negación externa)** [41, pág. 22] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso. Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de *negación externa* si

$$\mathcal{F}(\tilde{\sim}Q) = \tilde{\sim}\mathcal{F}(Q)$$

Como normalmente nos apoyaremos en números borrosos (e.g.  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  ó  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ ) para definir los cuantificadores vamos a definir el negado  $\mu_{\sim Q}$  de un número borroso  $\mu_Q$  como

$$\mu_{\sim Q}(x) = \tilde{\sim}\mu_Q(x)$$

### Consecuencias de la propiedad.

Como ejemplo, gracias a esta propiedad se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{menos\_de\_10})(X_1, X_2) &= \mathcal{F}(\tilde{\sim}\mathbf{al\_menos\_10})(X_1, X_2) \\ &= \tilde{\sim}\mathcal{F}(\mathbf{al\_menos\_10})(X_1, X_2) \end{aligned}$$

donde los cuantificadores semi-borrosos  $\mathbf{menos\_de\_10}(Y_1, Y_2) : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  y  $\mathbf{al\_menos\_10} : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  se definen como

$$\begin{aligned} \mathbf{menos\_de\_10}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : |Y_1 \cap Y_2| \geq 10 \\ 1 & : |Y_1 \cap Y_2| < 10 \end{cases} \\ \mathbf{al\_menos\_10}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : |Y_1 \cap Y_2| < 10 \\ 1 & : |Y_1 \cap Y_2| \geq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, se garantiza la equivalencia entre las expresiones “*menos de diez estudiantes altos son rubios*” y “*es falso que al menos diez estudiantes altos son rubios*” en el caso borroso.

### Propiedad de negación interna

La propiedad de negación interna es otra de las propiedades que se basan en la función de negación inducida. La primera formalización adecuada de la negación interna desde el punto de vista borroso es la planteada en [41, pág. 23]. De igual manera que la propiedad de negación externa, la negación interna constituye uno de los axiomas del marco axiomático inicial de Glöckner [41, pág. 22]:

A continuación damos la definición de la negación interna de un cuantificador:

**Definición 24** [47, pág. 98] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso de aridad  $n > 0$ . La negación interna  $Q \neg : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  de  $Q$  se define como

$$Q \neg (Y_1, \dots, Y_n) = Q(Y_1, \dots, \neg Y_n)$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ . La negación interna  $\tilde{Q} \tilde{\neg} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  de un cuantificador borroso  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define análogamente, basándose en el operador de complemento inducido  $\tilde{\neg}$ .

Por ejemplo, la negación interna de **todos**  $:\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$

$$\mathbf{todos} = \begin{cases} 0 & Y_1 \not\subseteq Y_2 \\ 1 & Y_1 \subseteq Y_2 \end{cases}$$

es **ninguno**  $:\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{todos}(Y_1, Y_2) \neg &= \mathbf{todos}(Y_1, \neg Y_2) \\ &= \begin{cases} 0 & Y_1 \not\subseteq \neg Y_2 \\ 1 & Y_1 \subseteq \neg Y_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\ &= \mathbf{ninguno}(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

La definición de la propiedad de negación interna es la siguiente:

**Definición 25 (Propiedad de negación interna)** [41, pág. 22] Sea  $Q : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso de aridad  $n > 0$ , diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de negación interna si

$$\mathcal{F}(Q \neg) = \mathcal{F}(Q) \tilde{\neg}$$

Como normalmente nos apoyaremos en números borrosos (e.g.  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  ó  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ ) para definir los cuantificadores vamos a definir el antónimo  $\mu_{Q\sim}$  de un número borroso  $\mu_Q$  como

$$\mu_Q(x) = \mu_Q(|E| - x)$$

si  $\mu_Q$  es del tipo  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  y

$$\mu_Q(x) = \mu_Q(1 - x)$$

si  $\mu_Q$  es del tipo  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ .

### Consecuencias de la propiedad.

Esta propiedad garantiza el cumplimiento de la propiedad de negación interna en el caso borroso. Por ejemplo, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\text{todos})(X_1, X_2) &= \mathcal{F}(\text{todos})(X_1, \sim\sim X_2) \\ &= \mathcal{F}(\text{todos})\sim(X_1, \sim X_2) \\ &= \mathcal{F}(\text{todos}\neg)(X_1, \sim X_2) \\ &= \mathcal{F}(\text{ninguno})(X_1, \sim X_2) \end{aligned}$$

es decir, se asegura la equivalencia entre las sentencias “*todos los estudiantes altos son rubios*” y “*ningún estudiante alto es no rubio*”.

### Propiedad de dualidad

La propiedad de dualidad es consecuencia de las propiedades de negación externa e interna. En [47] constituye uno de los axiomas utilizados para definir los DFSs, y sustituye a los axiomas derivados de las propiedades de negación externa e interna utilizados en [41].

El cuantificador dual de uno dado se define a continuación:

**Definición 26 (Cuantificador dual)** [47, pág. 99] El dual  $Q\tilde{\square} : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  de un cuantificador semi-borroso  $Q\tilde{\square} : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $n > 0$  se define como

$$Q\tilde{\square}(Y_1, \dots, Y_n) = \sim Q(Y_1, \dots, \neg Y_n)$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ . El dual  $\tilde{Q}\tilde{\square} = \sim\tilde{Q}\sim$  de un cuantificador borroso  $\tilde{Q}$  se define análogamente.

Por ejemplo, el dual de **todos**  $:\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$

$$\mathbf{todos} = \begin{cases} 0 & Y_1 \not\subseteq Y_2 \\ 1 & Y_1 \subseteq Y_2 \end{cases}$$

es **algún**:  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{todos}^{\tilde{\square}}(Y_1, Y_2) &= \tilde{\neg}\mathbf{todos}(Y_1, \neg Y_2) \\ &= \tilde{\neg} \begin{cases} 0 & Y_1 \not\subseteq \neg Y_2 \\ 1 & Y_1 \subseteq \neg Y_2 \end{cases} \\ &= \tilde{\neg} \begin{cases} 0 & Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \\ 0 & Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} \\ &= \mathbf{algún}(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

A partir del axioma de dualidad [47, pág. 100, 110] se define la siguiente propiedad:

**Definición 27 (Propiedad de dualidad)** *Sea  $Q : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso de aridad  $n > 0$ , diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de dualidad si*

$$\mathcal{F}(Q^{\tilde{\square}}) = \mathcal{F}(Q)^{\tilde{\square}}$$

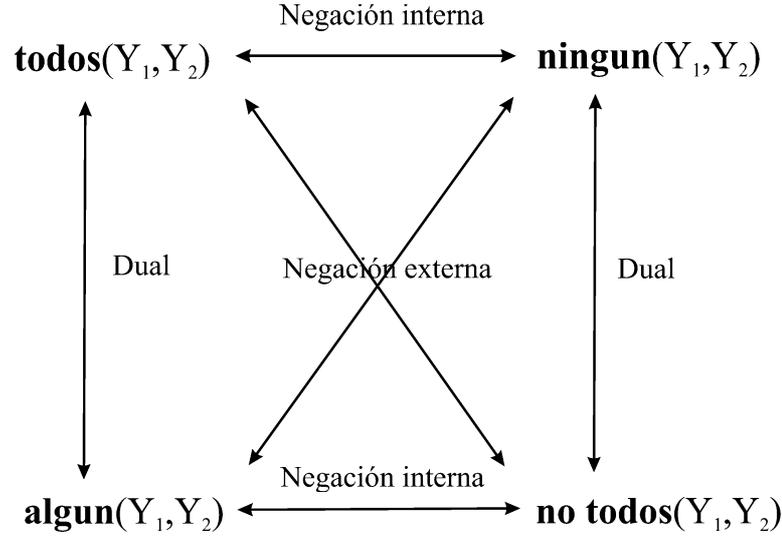
### Consecuencias de la propiedad.

Esta propiedad garantiza que el cumplimiento de la dualidad se traslada al caso borroso. Por ejemplo, se cumple que

$$\begin{aligned} \tilde{\neg}\mathcal{F}(\mathbf{todos}) \tilde{\neg}(X_1, X_2) &= \mathcal{F}(\mathbf{todos})^{\tilde{\square}}(X_1, X_2) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{todos}^{\tilde{\square}})(X_1, X_2) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{algún})(X_1, X_2) \end{aligned}$$

es decir, se asegura la equivalencia entre las sentencias “no todos los estudiantes altos no son rubios” y “algún estudiante alto es rubio”.

La relación entre las propiedades de negación externa, interna y dualidad se suele mostrar utilizando *cuadrados aristotélicos* [40, 41, 47]. En la figura 1.5 se muestra el cuadrado aristotélico relativo a los cuantificadores **todos**, **algún**, **ninguno**, y **no todos**.



**Figura 1.5:** Cuadrado aristotélico que representa las relaciones de negación y dualidad entre los cuantificadores **todos**, **algun**, **ningun** y **no todos**.

### Propiedad de intersecciones y uniones

La propiedad que se enuncia en este apartado complementa las propiedades basadas en las operaciones de complemento y negación inducidas (las propiedades de negación externa, interna y dualidad). En conjunción con éstas, permite que las combinaciones booleanas de los conjuntos argumento se trasladen al caso borroso. Tanto en [41] como en [47] se utiliza un axioma similar a la propiedad que se va a plantear para caracterizar los DFSs.

A continuación definimos el “cuantificador unión” y el “cuantificador intersección” de uno dado.

**Definición 28 (Cuantificador unión)** [47, pág. 101] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso de aridad  $n > 0$ . Definimos el cuantificador semi-borroso  $Q \cup : \mathcal{P}(E)^{n+1} \rightarrow \mathbf{I}$  como

$$Q \cup (Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}) = Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n \cup Y_{n+1})$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)$ . En el caso de cuantificadores borrosos  $\tilde{Q} \cup$  se define análogamente, basándose en la operación sobre conjuntos borrosos  $\tilde{\cup}$ .

**Definición 29 (Cuantificador intersección)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso de aridad  $n > 0$ . Definimos el cuantificador semi-borroso  $Q \cap :$

$\mathcal{P}(E)^{n+1} \rightarrow \mathbf{I}$  como

$$Q \cap (Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}) = Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n \cap Y_{n+1})$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)$ . En el caso de cuantificadores borrosos  $\tilde{Q}\tilde{\cap}$  se define análogamente, basándose en la operación sobre conjuntos borrosos  $\tilde{\cap}$ .

El cuantificador intersección se puede expresar a partir del cuantificador unión por medio de las leyes de De Morgan y el complemento.

Expresiones similares a “*todos los  $Y_1$  son  $Y_2$  o  $Y_3$* ” donde  $Y_1, Y_2, Y_3$  son conjuntos nítidos pueden ser evaluadas mediante cuantificadores de menor aridad gracias a las construcciones que se acaban de presentar:

$$\mathbf{todos} \cup (Y_1, Y_2, Y_3) = \mathbf{todos} (Y_1, Y_2 \cup Y_3)$$

La definición de la propiedad de uniones e intersecciones es la siguiente:

**Definición 30 (Propiedad de uniones e intersecciones)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $n > 0$ . Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  preserva la propiedad de las uniones y las intersecciones si se cumple:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q \cup) &= \mathcal{F}(Q) \tilde{\cup} \\ \mathcal{F}(Q \cap) &= \mathcal{F}(Q) \tilde{\cap} \end{aligned}$$

### Consecuencias de la propiedad.

Puesto que **algún** =  $\exists \cap$  (desde el punto de vista semántico las sentencias “*algún estudiante es español*” y “*existe alguien que es estudiante y español*” son equivalentes) entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\exists) (X_1 \tilde{\cap} X_2) &= \mathcal{F}(\exists) \tilde{\cap} (X_1, X_2) \\ &= \mathcal{F}(\exists \cap) (X_1, X_2) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{algún}) (X_1, X_2) \end{aligned}$$

De igual manera, como

$$\forall \cup \tau_1 \neg \tau_1 (Y_1, Y_2) = \mathbf{todos} (Y_1, Y_2)$$

entonces<sup>27</sup>

$$\mathcal{F}(\mathbf{todos})(X_1, X_2) = \mathcal{F}(\forall)(\neg X_1 \tilde{\cup} X_2)$$

### Propiedad de monotonía en los argumentos

Uno de los requerimientos esenciales de los QMFs es que preserven las propiedades de monotonía de los cuantificadores semi-borrosos. En este apartado se presenta la primera de las propiedades de monotonía que vamos a considerar; la propiedad de monotonía en los argumentos.

La propiedad de monotonía en los argumentos pertenece al conjunto de axiomas que caracterizan los DFSs tanto en [41] como en [47]. La misma se define a continuación:

---

<sup>27</sup>Vamos a desarrollar la expresión  $\forall \cup \tau_1 \neg \tau_1$  para demostrar que se cumple la igualdad mencionada. Primeramente nótese que

$$\begin{aligned} \forall \cup (Y_1, Y_2) &= (f : (Y) \rightarrow \forall(Y)) \cup (Y_1, Y_2) \\ &= (f' : (Y'_1, Y'_2) \rightarrow f(Y'_1 \cup Y'_2)) (Y_1, Y_2) \\ &= (f' : (Y'_1, Y'_2) \rightarrow \forall(Y'_1 \cup Y'_2)) (Y_1, Y_2) \\ &= \forall(Y_1 \cup Y_2) \end{aligned}$$

es decir,  $\forall \cup : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es una función que le asocia al par de conjuntos nítidos  $(Y_1, Y_2)$  el resultado de evaluar  $\forall(Y_1 \cup Y_2)$ .

Utilizando la misma metodología realizamos el desarrollo completo:

$$\begin{aligned} \forall \cup \tau_1 \neg \tau_1 &= (f : (Y_1, Y_2) \rightarrow \forall(Y_1 \cup Y_2)) \tau_1 \neg \tau_1 \\ &= (f' : (Y'_1, Y'_2) \rightarrow f(Y_2, Y_1)) \neg \tau_1 \\ &= (f' : (Y'_1, Y'_2) \rightarrow \forall(Y_2 \cup Y_1)) \neg \tau_1 \\ &= (f'' : (Y''_1, Y''_2) \rightarrow f'(Y''_1, \neg Y''_2)) \tau_1 \\ &= (f'' : (Y''_1, Y''_2) \rightarrow \forall(Y''_2 \cup \neg Y''_1)) \tau_1 \\ &= (f''' : (Y'''_1, Y'''_2) \rightarrow f''(Y'''_2, Y'''_1)) \\ &= (f''' : (Y'''_1, Y'''_2) \rightarrow \forall(Y'''_2 \cup \neg Y'''_1)) \\ &= \mathbf{todos} \end{aligned}$$

**Definición 31 (Monotonía)** [47, pág. 102] Diremos que un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  es no decreciente en su argumento  $i \in \{1, \dots, n\}$  si

$$Q(Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n) \leq Q(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y'_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$$

siempre que los argumentos  $Y_1, \dots, Y_n, Y'_i \in \mathcal{P}(E)$  satisfagan que  $Y_i \subseteq Y'_i$ . Diremos que  $Q$  es no creciente en su argumento  $i$  si bajo las mismas condiciones, se cumple siempre que

$$Q(Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n) \geq Q(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y'_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$$

Las definiciones correspondientes para cuantificadores borrosos  $Q : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  son enteramente análogas. En este caso, los argumentos recorren  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ , y ' $\subseteq$ ' es la relación de inclusión usual ( $X_1 \subseteq X_2$  si  $\mu_{X_1}(e) \leq \mu_{X_2}(e)$  para todo  $e \in E$ ).

Por ejemplo, el cuantificador semi-borroso **algún**:  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es monótono no decreciente en ambos argumentos.

La siguiente propiedad garantiza la extensión de la propiedad de monotonía en los argumentos a cuantificadores borrosos:

**Definición 32 (Propiedad de monotonía)** [47, pág. 105] Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  preserva la propiedad de monotonía en los argumentos si la imagen de los cuantificadores semi-borrosos  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  no decrecientes (respectivamente no crecientes) en su argumento  $i \in \{1, \dots, n\}$  por  $\mathcal{F}$  es también no decreciente (respectivamente no creciente) en su argumento  $i$ .

### Consecuencias de la propiedad

El cumplimiento de esta propiedad garantiza que  $\mathcal{F}(\mathbf{algún}) : \tilde{\mathcal{P}}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es monótonamente no decreciente en sus dos argumentos.

En [41, 47] se define también el concepto de *monotonía local*, que restringe la monotonía a un cierto rango.

### Propiedad de monotonía en los cuantificadores

La *propiedad de monotonía en los cuantificadores* es una consecuencia muy importante de los axiomas que caracterizan los DFSs [41, 47]. De manera independiente

ha sido definida en [80, pág. 73] para cuantificadores unarios bajo el nombre de *propiedad de inclusión de cuantificadores*.

Esta propiedad establece que cuando un cuantificador semi-borroso  $Q$  es “más específico” que otro  $Q'$  (intuitivamente,  $Q$  produce resultados menores que  $Q'$  para los mismos argumentos nítidos) las extensiones borrosas  $\mathcal{F}(Q)$  y  $\mathcal{F}(Q')$  deben mantener las relaciones de especificidad (es decir,  $\mathcal{F}(Q)$  produce resultados menores que  $\mathcal{F}(Q')$  para los mismos argumentos borrosos).

**Definición 33 (Monotonía en el cuantificador)** [47, pág. 134] Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos. Diremos que  $Q \leq Q'$  (respectivamente  $Q \geq Q'$ ) si para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  se cumple que  $Q(Y_1, \dots, Y_n) \leq Q'(Y_1, \dots, Y_n)$  (respectivamente  $Q(Y_1, \dots, Y_n) \geq Q'(Y_1, \dots, Y_n)$ ). Para cuantificadores borrosos definiremos  $\tilde{Q}(X_1, \dots, X_n) \leq \tilde{Q}'(X_1, \dots, X_n)$  y  $\tilde{Q} \geq \tilde{Q}'$  de manera análoga, sin más que tomar  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Por ejemplo, para los siguientes cuantificadores semi-borrosos

$$\begin{aligned} Q(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} S_{0,3,0,6} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases} \\ Q'(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} S_{0,5,0,8} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

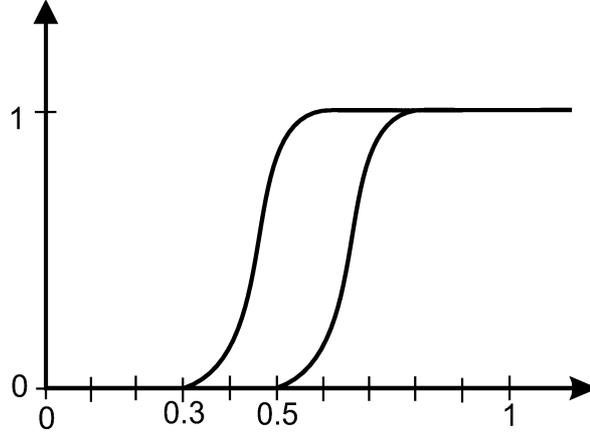
se cumple que  $Q \leq Q'$ . Los números borrosos que se utilizan en la definición de estos cuantificadores se representan en la figura 1.6.

La siguiente propiedad se define tomando como base el enunciado del Teorema 18 de [47, pág. 134]:

**Definición 34 (Propiedad de monotonía en los cuantificador)** [47, pág. 134] Sea  $\mathcal{F}$  un QFM, y  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos. Diremos que  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de monotonía en los cuantificadores  $Q \leq Q'$  si y sólo si  $\mathcal{F}(Q) \leq \mathcal{F}(Q')$ .

### Consecuencias de la propiedad

Esta propiedad garantiza que  $\mathcal{F}(Q) \leq \mathcal{F}(Q')$  para los cuantificadores definidos en la expresión 1.8.



**Figura 1.6:** Números borrosos asociados a los cuantificadores semi-borrosos  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definidos en la expresión 1.8.

De igual manera que para la propiedad de monotonía en los argumentos, en [41, 47] también se define el concepto de *monotonía local en el cuantificador*, que restringe la monotonía en el cuantificador a un cierto rango.

### Coherencia con los cuantificadores estándar

En esta propiedad se establece que la extensión de los cuantificadores clásicos ( $\exists, \forall$ , **algún** y **todos**) por un *QFM*  $\mathcal{F}$  sea coherente con los operadores lógicos inducidos por  $\mathcal{F}$ . Esta propiedad ha sido considerada de manera independiente en [80, secciones 3.2.1 y 3.2.2] y [41, sección 3.4], [47, sección 4.16], aunque en [41, 47] se maneja como una consecuencia de los axiomas que definen los DFSs.

**Definición 35 (Propiedad de coherencia con la lógica)** [47, sección 4.16] *Diremos que un mecanismo de borrosificación  $\mathcal{F}$  es coherente con la lógica si se cumple*

$$\mathcal{F}(\exists)(X) = \sup \left\{ \bigvee_{i=1}^m \mu_X(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

$$\mathcal{F}(\forall)(X) = \inf \left\{ \bigwedge_{i=1}^m \mu_X(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

$$\mathcal{F}(\text{algún})(X_1, X_2) = \sup \left\{ \bigvee_{i=1}^m \mu_{X_1}(a_i) \tilde{\wedge} \mu_{X_2}(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

$$\mathcal{F}(\text{todos})(X_1, X_2) = \inf \left\{ \bigwedge_{i=1}^m \mu_{X_1}(a_i) \tilde{\vee} \mu_{X_2}(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

### Consecuencias de la propiedad.

Esta propiedad asegura que la extensión de los cuantificadores estándar produce los resultados esperables desde el punto de vista borroso.

### Propiedad de inserción de argumentos nítida

Dado un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $n > 0$ , la inserción de argumentos nítida permite la construcción de un nuevo cuantificador semi-borroso de aridad  $n - 1$  por la inserción de un argumento nítido  $A \in \mathcal{P}(E)$  como último argumento del cuantificador. Combinado con la propiedad de trasposición de argumentos, permite la inserción de argumentos en posiciones arbitrarias. Tal como se explica en [47, sección 4.10], la inserción de argumentos permite modelar la *restricción adjetival*. Por ejemplo, en “*muchos hombres casados tienen hijos*” el adjetivo “*casados*” establece una restricción sobre el conjunto de hombres considerados.

En [47, sección 4.10] también se menciona que la inserción de argumentos es importante en relación con el *principio de composicionalidad de Frege*, que establece que el significado de una expresión compleja debe ser función del significado de sus subexpresiones.

La inserción de argumentos nítida puede parecer de interés menor. No obstante, esta propiedad forma parte del conjunto de axiomas inicial considerados por Glöckner para la definición de los DFSs en [41]. Además, su extensión al caso borroso no sólo es muy interesante, sino que es un requisito necesario para el modelado adecuado de expresiones con *cuantificación anidada* (véase la sección 4.6).

La inserción de un argumento nítido se define como:

**Definición 36 (Inserción de argumentos nítida)** [47, pág. 130] Sea  $Q : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $n > 0$ , y  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Por  $Q \triangleleft A : \mathcal{P}^{n-1}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  denotamos el cuantificador semi-borroso definido como

$$Q \triangleleft A (Y_1, \dots, Y_{n-1}) = Q (Y_1, \dots, Y_{n-1}, A)$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)$ . De manera análoga, se define  $\tilde{Q} \triangleleft A$  con  $A \in \mathcal{P}(E)$ .

La siguiente propiedad se define a partir del teorema 15 de [47, pág. 131]:

**Definición 37 (Propiedad de inserción de argumentos nítida)** Sea  $\mathcal{F}$  un QFM. Diremos que  $\mathcal{F}$  es compatible con la inserción de argumentos nítida si se cumple que

$$\mathcal{F}(Q \triangleleft A) = \mathcal{F}(Q) \triangleleft A$$

para todo cuantificador semi-borroso  $Q$  de aridad  $n > 0$ , y todo subconjunto nítido  $A \in \mathcal{P}(E)$ .

### Consecuencias de la propiedad

El fenómeno de la restricción adjetival por un conjunto nítido puede ser modelado por la inserción de argumentos. Consideremos la sentencia “*muchos de los estudiantes españoles son informáticos*”. Sea **muchos** :  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso binario; y nótese que,

$$\begin{aligned} \mathbf{muchos}_{\tau_1} \cap \triangleleft A_{\tau_1} &= (f' : (Y'_1, Y'_2) \rightarrow \mathbf{muchos}(Y'_2, Y'_1)) \cap \triangleleft A_{\tau_1} \\ &= (f'' : (Y''_1, Y''_2, Y''_3) \rightarrow f'(Y''_1, Y''_2 \cap Y''_3)) \triangleleft A_{\tau_1} \\ &= (f'' : (Y''_1, Y''_2, Y''_3) \rightarrow \mathbf{muchos}(Y''_2 \cap Y''_3, Y''_1)) \triangleleft A_{\tau_1} \\ &= (f''' : (Y'''_1, Y'''_2) \rightarrow f'' : (Y'''_1, Y'''_2, A)) \tau_1 \\ &= (f''' : (Y'''_1, Y'''_2) \rightarrow \mathbf{muchos}(Y'''_2 \cap A, Y'''_1)) \tau_1 \\ &= (f'''' : (Y''''_1, Y''''_2) \rightarrow f''' : (Y''''_2, Y''''_1)) \\ &= (f'''' : (Y''''_1, Y''''_2) \rightarrow \mathbf{muchos}(Y''''_1 \cap A, Y''''_2)) \end{aligned}$$

Entonces, para nuestro ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{muchos}_{\tau_1} \cap \triangleleft \mathbf{españoles}_{\tau_1}(\mathbf{estudiantes}, \mathbf{informáticos}) \\ = \mathbf{muchos}(\mathbf{estudiantes} \cap \mathbf{españoles}, \mathbf{informáticos}) \end{aligned}$$

### Propiedad de compatibilidad con la aplicación funcional

La *propiedad de compatibilidad con la aplicación funcional* forma parte de los axiomas que definen los DFSs tanto en [41] como en [47]. Esta propiedad exige que todo QFM sea compatible con el principio de extensión inducido por el mismo.

El principio de extensión inducido por un QFM se define a continuación:

**Definición 38 (Principio de extensión inducido)** [47, pág. 108] Todo QFM  $\mathcal{F}$  induce un principio de extensión  $\widehat{\mathcal{F}}$  que a cada función  $f : E \rightarrow E'$  (donde

$E, E' \neq \emptyset$ ) le asigna una función  $\widehat{\mathcal{F}}(f) : \widetilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}(E')$  que se define como

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(f)(X)}(e') = \mathcal{F}\left(\chi_{\widehat{f}(\cdot)}(e')\right)(X)$$

para todo  $X \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$ ,  $e' \in E'$ .

Nótese que en  $\chi_{\widehat{f}(\cdot)}(e')$  la expresión  $\widehat{f} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E')$  es la extensión a conjuntos de la función  $f$  (véase la definición 8) por lo que  $\chi_{\widehat{f}(\cdot)}(e')$  es la función característica de esta extensión; es decir,  $\chi_{\widehat{f}(\cdot)}(e')$  es un cuantificador semi-borroso que ante un conjunto  $Y \in \mathcal{P}(E)$  devuelve 1 cuando  $e' \in \widehat{f}(Y)$  y 0 en otro caso.

La propiedad de compatibilidad con la aplicación funcional se define como sigue:

**Proposición 1 (Compatibilidad con la aplicación funcional)** [47, pág. 109]  
Sea  $\mathcal{F}$  un QFM dado. Diremos que  $\mathcal{F}$  es compatible con su principio de extensión si la igualdad

$$\mathcal{F}\left(Q \circ \bigtimes_{i=1}^n \widehat{f}_i\right) = \mathcal{F}(Q) \circ \bigtimes_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}(f_i)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathcal{F}\left(Q \circ \bigtimes_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}(f_i)\right)(X'_1, \dots, X'_n) = \mathcal{F}(Q)\left(\widehat{\mathcal{F}}(f_1)(X'_1), \dots, \widehat{\mathcal{F}}(f_n)(X'_n)\right)$$

es válida para todo cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  y todas las funciones  $f_1, \dots, f_n : E' \rightarrow E$  con dominio  $E' \neq \emptyset$ ,  $X'_1, \dots, X'_n \in \widetilde{\mathcal{P}}(E')$ .

Es decir, si  $\mathcal{F}$  es un QFM que cumple la propiedad aplicación funcional, se obtienen idénticos resultados cuando aplicamos el principio de extensión inducido a los conjuntos argumento  $X'_1, \dots, X'_n \in \widetilde{\mathcal{P}}(E')$  y luego aplicamos el cuantificador  $\mathcal{F}(Q)$ , que cuando definimos el cuantificador semi-borroso  $Q \circ \bigtimes_{i=1}^n \widehat{f}_i$  (que toma conjuntos nítidos  $Y'_1, \dots, Y'_n \in \mathcal{P}(E')$ , les aplica las funciones  $\bigtimes_{i=1}^n \widehat{f}_i$ , y luego evalúa  $Q : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$ ), y le aplicamos el QFM  $\mathcal{F}$  para calcular el valor de la función  $\mathcal{F}\left(Q \circ \bigtimes_{i=1}^n \widehat{f}_i\right)$  sobre  $X'_1, \dots, X'_n \in \widetilde{\mathcal{P}}(E')$ .

### Consecuencias de la propiedad

Esta propiedad es muy importante en conjunción con el resto de los axiomas que definen los DFSs, ya que conjuntamente aseguran todas las propiedades que acabamos de exponer.

## Otras propiedades importantes derivadas del marco axiomático de los DFSs

Para simplificar la exposición no hemos considerado todas las propiedades derivadas del marco axiomático de los DFSs sino únicamente aquellas que son de mayor relevancia. En esta sección vamos a realizar una pequeña descripción de algunas de las propiedades derivadas del marco que no hemos tratado. Aconsejamos al lector consultar [47, capítulos 3 y 4] para más información acerca de estas propiedades.

En general, las propiedades que vamos a describir, o bien son requerimientos muy básicos difícilmente no verificados por los modelos de cuantificación, o bien están muy relacionadas con las propiedades que acabamos de analizar. En todo caso, los modelos que plantearemos en esta memoria verifican estas propiedades.

Dos propiedades no consideradas a las que ya se ha hecho referencia son las *propiedades de monotonía local en los argumentos* y *monotonía local en los cuantificadores* (véase la discusión de las propiedades de monotonía en los argumentos y en los cuantificadores que hemos hecho en esta sección), las cuales restringen la conservación de la monotonía a rangos específicos. Los modelos que se definen en esta memoria verifican ambas propiedades. Puede consultarse [47, sección 4.11] para obtener más información acerca de las mismas.

Otra propiedad en la que no vamos a profundizar es la *propiedad de extensiones cilíndricas*. Intuitivamente, la propiedad de extensiones cilíndricas establece que los argumentos redundantes pueden ser ignorados. Por ejemplo, sea  $Q : \mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso tal que  $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$  sólo depende del segundo argumento  $Y_2$ ; es decir,  $Q(Y_1, Y_2, Y_3) = Q'(Y_2)$  para cierto  $Q' : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ . Entonces es esperable que  $\mathcal{F}(Q)(X_1, X_2, X_3)$  sólo dependa de  $X_2$  para  $X_1, X_2, X_3 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ , o más precisamente, que  $\mathcal{F}(Q)(X_1, X_2, X_3) = \mathcal{F}(Q')(X_2)$ . Los modelos que se presentan en esta memoria cumplen la propiedad que se acaba de mencionar. Se pueden encontrar más información acerca de esta propiedad en [47, sección 4.6].

La *propiedad de extensionalidad* [47, sección 4.14] establece que los QFMs se comporten adecuadamente cuando “añadimos” al universo de referencia elementos irrelevantes. Consideremos la sentencia “la mayoría de los individuos altos son rubios”. Y supongamos que para evaluarla aplicamos un cierto QFM  $\mathcal{F}$  al cuantificador semi-borroso **mayoría**  $:\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  para plantear después  $\mathcal{F}(\mathbf{mayoría})(\mathbf{altos}, \mathbf{rubios})$ . Intuitivamente, cuando añadimos al universo de referencia  $E$  cierta cantidad de elementos que no tienen nada que ver con las propiedades mencionadas (por ejem-

plo, “*sillas*”) el resultado de  $\mathcal{F}$  (**mayoría**)(**altos, rubios**) no se debe ver afectado. Aunque esta propiedad es muy fundamental es violada por algunas de las aproximaciones a la cuantificación borrosa más conocidas. Por ejemplo, las propuestas de Yager [93, pág. 190], [94, pág. 72] para cuantificadores proporcionales no cumplen esta propiedad, tal como se demuestra en [47, sección A.4]<sup>28</sup> y se puede ver en la sección 1.5 de revisión bibliográfica.

Comentamos ahora la *propiedad de contextualidad*. Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso cualquiera y denotemos por  $core(X)$  el núcleo de  $X$  y por  $spp(X)$  su soporte<sup>29</sup>. Se define el contexto ( $ctx$ ) de un conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  como el rango de conjuntos tales que  $core(X) \subseteq Y \subseteq spp(X)$ . Entonces, la propiedad de contextualidad establece que si dos cuantificadores semi-borrosos  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  son equivalentes en el contexto de ciertos conjuntos borrosos  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  (en el sentido de que producen los mismos resultados para los conjuntos de dicho rango), entonces su extensión por un QFM  $\mathcal{F}$  debe cumplir que  $\mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{F}(Q')(X_1, \dots, X_n)$ . Intuitivamente, los  $Y \in ctx(X)$  son los únicos conjuntos que pueden tener una medida de similaridad con  $X$  mayor que 0, por lo que si los cuantificadores  $Q$  y  $Q'$  producen los mismos resultados para los conjuntos del rango  $ctx(X_1), \dots, ctx(X_n)$  entonces es razonable que  $\mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n)$  sea igual a  $\mathcal{F}(Q')(X_1, \dots, X_n)$ . En [47, sección 4.15] se da información detallada acerca de esta propiedad. Los modelos definidos en esta memoria también la cumplen.

## El marco axiomático de los DFSs

Presentamos a continuación el marco axiomático planteado en [43, 45, 47, 50]. Dicho marco axiomático está formado por 6 axiomas independientes [47, teorema 1, pág. 112] cuyo cumplimiento garantiza todas las propiedades que acabamos de exponer.

El marco en sí es un refinamiento del marco inicial planteado por Glöckner en [41, pág. 22], formado por 9 axiomas no independientes. Ambos marcos axiomáticos son equivalentes.

**Definición 39** [47, definición 24, pág. 110] Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  es un me-

<sup>28</sup>Más precisamente, en los modelos propuestos por Yager para cuantificadores proporcionales, el resultado puede variar cuando añadimos al referencial elementos con valor de pertenencia 0 al conjunto borroso **altos**.

<sup>29</sup>Es decir,  $core(X) = \{e \in E : \mu_X(e) = 1\}$  y  $spp(X) = \{e \in E : \mu_X(e) > 0\}$ .

canismo de borrosificación de determinantes (DFS) si las siguientes condiciones se satisfacen para todos los cuantificadores semi-borrosos  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$ .

$$\text{Generalización correcta} \quad \mathcal{U}(\mathcal{F}(Q)) = Q \quad \text{si } n \leq 1 \quad (\text{Z-1})$$

$$\text{Cuantificadores de proyección} \quad \mathcal{F}(Q) = \tilde{\pi}_e \quad \text{si } Q = \pi_e \text{ para algún } e \in E \quad (\text{Z-2})$$

$$\text{Dualidad} \quad \mathcal{F}(Q\tilde{\square}) = \mathcal{F}(Q)\tilde{\square} \quad n > 0 \quad (\text{Z-3})$$

$$\text{Uniones internas} \quad \mathcal{F}(Q\cup) = \mathcal{F}(Q)\tilde{\cup} \quad n > 0 \quad (\text{Z-4})$$

$$\text{Preservación de la monotonía} \quad \begin{array}{l} \text{Si } Q \text{ es no creciente en su argumento } n, \\ \text{entonces } \mathcal{F}(Q) \text{ es no creciente} \\ \text{en su argumento } n, n > 0 \end{array} \quad (\text{Z-5})$$

$$\text{Aplicación funcional} \quad \begin{array}{l} \mathcal{F}\left(Q \circ \times_{i=1}^n \hat{f}_i\right) = \mathcal{F}(Q) \circ \times_{i=1}^n \hat{\mathcal{F}}(f_i) \\ \text{donde } f_1, \dots, f_n : E' \rightarrow E, E' \neq \emptyset \end{array} \quad (\text{Z-6})$$

Nótese que el marco axiomático está formado por una selección de las propiedades (o restricciones de éstas) que hemos presentado.

En [43, 45, 47, 50] todos los QFM's que se definen son DFS's. Además, todos ellos inducen la tnorma mínimo y la tconorma máximo (véase la definición de la propiedad de operadores inducidos). El autor utiliza la nomenclatura *DFS's estándar* para los DFS's que inducen estos operadores.

### 1.4.2. Propiedades adicionales no derivadas del marco axiomático de los DFS's

En esta sección se exponen algunas propiedades muy importantes que no son consecuencia del marco axiomático de los DFS's. Dado el interés de las mismas, se podría pensar en su inclusión dentro del marco axiomático de los DFS, pero en general estos criterios son demasiado restrictivos. Algunos limitarían excesivamente el número de modelos aceptables; otros incluso entran en contradicción con los axiomas del marco.

Describimos a continuación las propiedades que vamos a analizar. La propiedad de *inserción borrosa de argumentos* es la análoga borrosa de la propiedad de inserción de argumentos nítida. Veremos que esta propiedad es un requerimiento demasiado fuerte para los modelos de cuantificación borrosa, ya que limitaría excesivamente el número de modelos aceptables. Las propiedades de *continuidad* son

muy importantes desde el punto de vista práctico pero no tanto desde el punto de vista del análisis teórico de los DFSs plausibles. La propiedad de *conservatividad*, aunque muy importante desde el punto de vista lingüístico, entra en contradicción con los axiomas que se utilizan para definir los DFSs. Por su parte, la propiedad de *propagación de la borrosidad* es un criterio interesante cuyo cumplimiento puede ser beneficioso para ciertas aplicaciones pero perjudicial para otras.

Para finalizar, las propiedades *de media para el cuantificador identidad y de interpretación probabilística de los cuantificadores* son dos propiedades de mucho interés práctico que verifican los modelos de cuantificación definidos en esta memoria, basados en una interpretación probabilista de los conjuntos borrosos.

### Propiedad de inserción de argumentos borrosa

La inserción de argumentos borrosa no puede ser modelada directamente, ya que un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $n > 0$  acepta únicamente argumentos nítidos; es decir, para  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  borroso únicamente  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A$  está definido y no  $Q \triangleleft A$ . Pero tal como se explica en [47, sección 6.8], para un QFM  $\mathcal{F}$  y un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  se puede estudiar si existe un cuantificador semi-borroso  $Q' : \mathcal{P}^{n-1}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$\mathcal{F}(Q) \triangleleft A = \mathcal{F}(Q') \quad (1.9)$$

para todo  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

La elección razonable de  $Q'$  es la siguiente:

**Definición 40** [47, pág. 178] Sea  $\mathcal{F}$  un QFM,  $Q : \mathcal{P}(E)^{n+1} \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso y  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Entonces  $Q \tilde{\triangleleft} A : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se define como

$$Q \tilde{\triangleleft} A = \mathcal{U}(\mathcal{F}(Q) \triangleleft A)$$

es decir,  $Q \tilde{\triangleleft} A(Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{F}(Q)(Y_1, \dots, Y_n, A)$  para todos los conjuntos nítidos  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$ .

En [47, sección 6.8] se menciona que  $Q' = Q \tilde{\triangleleft} A$  es la única elección de  $Q'$  que puede satisfacer la ecuación 1.9, ya que todo  $Q'$  que satisfaga  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A = \mathcal{F}(Q')$

también *satisface*<sup>30</sup>

$$Q' = \mathcal{U}(\mathcal{F}(Q')) = \mathcal{U}(\mathcal{F}(Q) \triangleleft A) = Q \tilde{\triangleleft} A$$

Por desgracia, ni siquiera el rígido marco que caracteriza los DFSs garantiza el cumplimiento de la ecuación 1.9. Es más, veremos en el desarrollo de esta memoria que en este momento sólo se conocen dos DFSs que garantizan la misma.

La siguiente propiedad resume la explicación anterior:

**Definición 41** [47, pág. 178] Sea  $\mathcal{F}$  un QFM. Diremos que  $\mathcal{F}$  es compatible con la inserción de argumentos borrosa si para todo cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  de aridad  $n > 0$  y todo  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  borroso se cumple que

$$\mathcal{F}(Q) \triangleleft A = \mathcal{F}(Q \tilde{\triangleleft} A)$$

### Consecuencias de la propiedad

Las consecuencias de esta propiedad son similares a las consecuencias de la inserción de argumentos nítida, pero extendidas al caso borroso. Además, esta propiedad tiene una relación muy fuerte con el modelado de sentencias con *cuantificación anidada* (véase la sección 4.6). Aunque no analizaremos en profundidad este tema en esta memoria, en [47, pág. 369] se establece un teorema que afirma que todo DFS capaz de modelar adecuadamente la cuantificación anidada verifica la propiedad de inserción de argumentos borrosa. No obstante, la suficiencia de la condición todavía no ha sido demostrada, por lo que en estos momentos se desconoce si los modelos

<sup>30</sup>Una pequeña aclaración no está de más para esta definición. Estamos buscando los  $Q' : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  tales que  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A = \mathcal{F}(Q')$ ; es decir, para el cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A$  buscamos los posibles cuantificadores semi-borrosos  $Q'$  tales que  $\mathcal{F}(Q')$  sea el cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A$ . Pero  $\mathcal{F}$  es inyectiva, por lo que a lo sumo puede existir un cuantificador borroso  $Q'$  cumpliendo la condición anterior. Pero como para un posible  $Q'$  cumpliendo  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A = \mathcal{F}(Q')$  tenemos que

$$Q' = \mathcal{U}(\mathcal{F}(Q')) = \mathcal{U}(\mathcal{F}(Q) \triangleleft A) = Q \tilde{\triangleleft} A$$

por lo que necesariamente es  $Q' = Q \tilde{\triangleleft} A$  (caso de existir). Nótese que esto no garantiza que  $\mathcal{F}(Q \tilde{\triangleleft} A) = \mathcal{F}(Q) \triangleleft A$ . Podría ser que la imagen  $\mathcal{F}(Q \tilde{\triangleleft} A)$  fuese un cuantificador borroso distinto de  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A$ .  $\mathcal{F}(Q) \triangleleft A$  es un cuantificador borroso que no tiene por qué ser imagen de ningún  $Q' : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$ , ya que existen infinidad de cuantificadores borrosos cuyo valor coincide para conjuntos clásicos, y  $\triangleleft A$  es una operación de cuantificadores borrosos en cuantificadores borrosos. Por lo tanto no está garantizado que  $\mathcal{F}(\mathcal{U}(\mathcal{F}(Q) \triangleleft A)) = \mathcal{F}(Q) \triangleleft A$ .

que la verifican son realmente adecuados para modelar expresiones con cuantificación anidada. La profundización en estas cuestiones es en este momento uno de los puntos abiertos en la investigación sobre cuantificación borrosa.

### Propiedad de continuidad en los argumentos

Las propiedades de continuidad son de suma importancia, y en general su violación invalida los modelos de cuantificación para su utilización en la práctica. Por una parte todo proceso está sometido a errores de medida, por lo que la discontinuidad de un modelo en conjunción con las deficiencias en la calidad de los datos a los que se aplica podría ocasionar análisis completamente distintos de una situación. Por otra, es muy difícil interpretar que dos observaciones con diferencias no significativas produzcan distintas salidas, tanto desde el punto de vista del usuario (que no sería capaz de entender la causa de las diferencias) como desde el punto de vista de las aplicaciones (imaginemos por ejemplo la utilización de un modelo discontinuo en un sistema de control).

En [47, sección 6.2] también se interpreta la continuidad desde el punto de vista de la comunicación entre individuos. Según Glöckner sería difícil justificar que pequeñas diferencias en la interpretación de los cuantificadores tuviesen como consecuencia que los individuos fuesen incapaces de comunicarse.

La definición de la propiedad de *continuidad en los argumentos* [47, Sección 6.2] se apoya en la siguiente métrica que mide la distancia entre dos pares  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $(X'_1, \dots, X'_n) \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  de conjuntos borrosos:

**Definición 42** ( $d((X_1, \dots, X_n), (X'_1, \dots, X'_n))$ ) [47, pág. 169] Para todo conjunto base  $E \neq \emptyset$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ , definimos la métrica  $d : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \times \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  como

$$d((X_1, \dots, X_n), (X'_1, \dots, X'_n)) = \max_{i=1}^n \sup \{ |\mu_{X_i}(e) - \mu_{X'_i}(e)| : e \in E \}$$

para todo  $X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Basándose en esta métrica la propiedad de continuidad en los argumentos se define de la siguiente manera:

**Definición 43 (Propiedad de continuidad en los argumentos)** [47, pág. 169] Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  es continuo en los argumentos si y sólo si la imagen por  $\mathcal{F}$

de todo cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  es un cuantificador borroso continuo  $\mathcal{F}(Q)$ ; es decir, para todo  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{P}(E)^n$  y todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d(\mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n), \mathcal{F}(Q)(X'_1, \dots, X'_n)) < \varepsilon$  para todo  $X'_1, \dots, X'_n \in \mathcal{P}(E)$  cumpliendo  $d((X_1, \dots, X_n), (X'_1, \dots, X'_n)) < \delta$ .

### Consecuencias de la propiedad

Esta propiedad asegura que pequeñas variaciones en los valores de los argumentos no producen grandes saltos en el resultado de la evaluación de un cuantificador.

### Propiedad de continuidad en el cuantificador

De igual manera que no queremos que se produzcan grandes diferencias en la valoración de un cuantificador cuando realizamos pequeñas modificaciones en los conjuntos argumento, tampoco queremos que se produzcan grandes variaciones al modificar, ligeramente, los cuantificadores. La distancia entre dos cuantificadores semi-borrosos se plantea de la siguiente manera:

**Definición 44** ( $d(Q, Q')$ ) [47, pág. 169] Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  dos cuantificadores semi-borrosos. Definimos la distancia entre  $Q$  y  $Q'$  como

$$d(Q, Q') = \sup \left\{ \left| Q(Y_1, \dots, Y_n) - Q'(Y_1, \dots, Y_n) \right| : Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)^n \right\}$$

La definición análoga para cuantificadores borrosos es:

**Definición 45** ( $d(\tilde{Q}, \tilde{Q}')$ ) [47, pág. 169] Sean  $Q, Q' : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  dos cuantificadores borrosos. Definimos la distancia entre  $Q$  y  $Q'$  como

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}(Q), \mathcal{F}(Q')) \\ = \sup \left\{ \left| \mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n) - \mathcal{F}(Q')(X_1, \dots, X_n) \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \end{aligned}$$

A partir de las definiciones anteriores se define la propiedad de continuidad en el cuantificador:

**Definición 46 (Propiedad de continuidad en el cuantificador)** [47, pág. 169] Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  es continuo en el cuantificador si y sólo si para todo cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  y todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d(\mathcal{F}(Q), \mathcal{F}(Q')) < \varepsilon$  para todo  $Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  que satisfaga  $d(Q, Q') < \delta$ .

### Consecuencias de la propiedad

Esta propiedad asegura que pequeñas variaciones en los cuantificadores semi-borrosos no producen grandes saltos en el resultado de la evaluación.

### Propiedad de conservatividad

La propiedad de conservatividad es una de las características más relevantes de la mayoría de los cuantificadores que nos encontramos en el lenguaje natural [5, 40, 56–58]. Intuitivamente, los cuantificadores binarios conservativos son aquellos cuya semántica no se modifica cuando limitamos el alcance del cuantificador a su restricción. Por ejemplo, la semántica de la sentencia “*la mayoría de los estudiantes son españoles*” es equivalente a la semántica de la sentencia “*la mayoría de los estudiantes son estudiantes y españoles*”. La definición de la propiedad de conservatividad para cuantificadores semi-borrosos es la siguiente:

**Definición 47** [47, pág. 176] *Diremos que un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es conservativo si*

$$Q(Y_1, Y_2) = Q(Y_1, Y_1 \cap Y_2)$$

para todo  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

En el caso borroso se consideran las siguientes posibilidades:

**Definición 48 (Conservatividad fuerte)** [47, pág. 177] *Diremos que un cuantificador borroso  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  es fuertemente conservativo si*

$$\tilde{Q}(X_1, X_2) = \tilde{Q}(X_1, X_1 \cap X_2)$$

para todo  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

**Definición 49 (Conservatividad débil)** [47, pág. 176] *Diremos que un cuantificador borroso  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  es débilmente conservativo si*

$$\tilde{Q}(X_1, X_2) = \tilde{Q}(X_1, spp(X_1) \cap X_2)$$

para todo  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

A partir de las definiciones de conservatividad se establecen las siguientes propiedades:

**Definición 50 (Propiedad de conservatividad fuerte)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso. Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  preserva fuertemente la conservatividad si cumple

$$\mathcal{F}(Q)(X_1, X_2) = \mathcal{F}(Q)(X_1, X_1 \tilde{\cap} X_2)$$

para todo  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

**Definición 51 (Propiedad de conservatividad débil)** Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso. Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  preserva débilmente la conservatividad si cumple

$$\mathcal{F}(Q)(X_1, X_2) = \mathcal{F}(Q)(X_1.spp(X_1) \tilde{\cap} X_2)$$

para todo  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Desgraciadamente, y pese a la importancia de esta propiedad desde el punto de vista lingüístico, ningún DFS puede ser fuertemente conservativo [47, sección 6.7]. Por su parte, el criterio de conservatividad débil no es muy restrictivo y tanto los QFMs definidos en esta memoria, como los DFSs definidos en [47] lo cumplen.

Es destacable que uno de los modelos que se analizan en esta memoria (véase la sección 3.2.1) cumple la propiedad de conservatividad fuerte. Ninguno de los restantes modelos cumple esta propiedad.

### Consecuencias de la propiedad

Por ejemplo, si un QFM cumple la propiedad de conservatividad fuerte entonces se cumple que

$$\mathcal{F}(\mathbf{todos})(\mathbf{altos}, \mathbf{rubios}) = \mathcal{F}(\mathbf{todos})(\mathbf{altos}, \mathbf{altos} \tilde{\cap} \mathbf{rubios})$$

al ser  $\mathbf{todos} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso conservativo.

### Propiedad de propagación de la borrosidad

La propiedad de *propagación de la borrosidad* [47, sección 6.3] garantiza que al evaluar un cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q)$ , obtenemos resultados “más nítidos” ante

entradas “más nítidas”. Esta propiedad no constituye un criterio de comportamiento exigible a los QFMs, sino más bien un criterio opcional que nos ayuda a caracterizar el comportamiento de los modelos.

**Definición 52** *La relación de orden parcial  $\preceq_c: \mathbf{I} \times \mathbf{I}$  se define como*

$$x \preceq_c y \iff y \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{1}{2} \leq x \leq y$$

*Esta relación se extiende de la manera obvia a conjuntos borrosos.*

**Definición 53** [47, pág. 170] *Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  propaga la borrosidad en los argumentos si y sólo si se cumple la siguiente propiedad para todo cuantificador semi-borroso  $Q: \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  y todos los conjuntos borrosos  $X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ : Si  $X_i \preceq_c X'_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $\mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n) \preceq_c \mathcal{F}(Q)(X'_1, \dots, X'_n)$ .*

**Definición 54** [47, pág. 170] *Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  propaga la borrosidad en los cuantificadores si y sólo si  $\mathcal{F}(Q) \preceq_c \mathcal{F}(Q')$  siempre que  $Q \preceq_c Q'$ .*

### Consecuencias de la propiedad

Aunque esta propiedad parece muy adecuada desde el punto de vista lingüístico, la misma entra en contradicción con la necesidad de realizar agregaciones u ordenaciones de elementos [47, sección 8.1]. En sus trabajos, Glöckner ha dividido los DFSs que ha descubierto en dos clases; la primera compuesta por los modelos que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad y la segunda compuesta por los modelos que no la cumplen. Según dicho autor, los modelos que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad no son adecuados para aquellas aplicaciones en las que se necesitan “agregaciones finas” de las entradas.

Nuestra opinión al respecto es más dura. Creemos que el cumplimiento de la propiedad de propagación de la borrosidad prácticamente invalida los modelos para las aplicaciones en las que la agregación de valores es de interés. El ejemplo que mostramos a continuación y el análisis realizado en la sección 1.5.7 de los DFSs estándar que verifican esta propiedad nos parecen lo suficientemente determinantes como para demostrar que esta clase de modelos no es apropiada para muchas de las aplicaciones en las que se ha propuesto la utilización de cuantificación borrosa.

**Ejemplo 6** *Considérese el siguiente cuantificador semi-borroso: identidad :  $\mathcal{P}(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) \rightarrow \mathbf{I}$  definido como*

$$\mathbf{identidad}(Y) = \frac{|Y|}{|E|}, Y \in \mathcal{P}(E)$$

*Cuando evaluamos el cuantificador semi-borroso **identidad** sobre el conjunto  $Y = \{e_1, e_2\}$  obtenemos el resultado*

$$\mathbf{identidad}(\{e_1, e_2\}) = \frac{|\{e_1, e_2\}|}{4} = 0,5$$

*es decir, la media de los grados de pertenencia. Además, para todo QFM que cumpla la propiedad de generalización correcta se cumple que*

$$\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) = 0,5$$

*Pero si  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de propagación de la borrosidad en los argumentos entonces para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  tal que  $X \preceq_c Y$  ( $X$  es “menos específico” que  $Y$ ) será  $\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(X) \preceq_c \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(Y)$ . Pero como 0,5 es el valor “menos específico” entonces para todo  $X$  tal que  $\mu_X(e_1), \mu_X(e_2) \in [0,5,1]$ ,  $\mu_X(e_3), \mu_X(e_4) \in [0,0,5]$  tendremos que*

$$\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(X) = 0,5$$

*por ejemplo,*

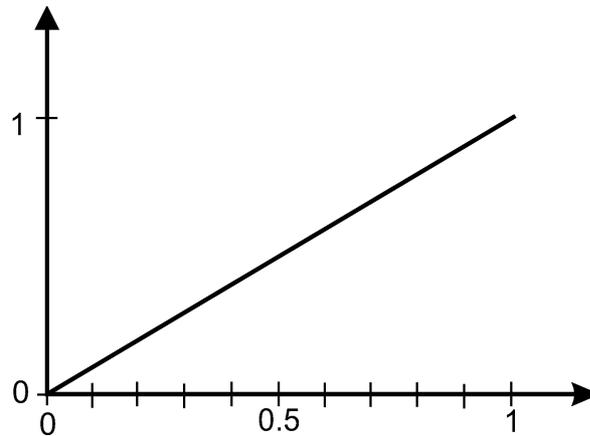
$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{0,9/e_1, 0,8/e_2, 0,1/e_3, 0,2/e_4\}) \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Evidentemente, en muchas de las aplicaciones prácticas de la cuantificación borrosa queremos distinguir las situaciones anteriores.

### Propiedad de media para el cuantificador identidad

La *propiedad de media para el cuantificador identidad* establece que al aplicar un QFM que la verifique al cuantificador **identidad**:  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$

$$\mathbf{identidad}(Y) = \frac{|Y|}{|E|}, Y \in \mathcal{P}(E)$$



**Figura 1.7:** Número borroso asociado a la definición del cuantificador **identidad**:  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ .

se obtenga como resultado la media de los grados de pertenencia del conjunto argumento. Intuitivamente, si consideramos que el cuantificador **identidad** se utiliza para evaluar el grado en que se cumplen cierto número de criterios, entonces este cuantificador establece una mejora lineal en el resultado con el cumplimiento de cada nuevo criterio. El número borroso asociado a la definición de este cuantificador se ha representado en la figura 1.7.

Aunque esta propiedad no tiene interés desde el punto de vista lingüístico, desde el punto de vista de las aplicaciones su importancia es indudable. Piénsese que en muchos de los problemas para los cuales se ha planteado la utilización de cuantificadores borrosos (véase el comienzo de este capítulo para algunos ejemplos) el interés de la cuantificación reside en su versatilidad para la definición de agregaciones de los grados de pertenencia. De esta manera, esta propiedad permite la representación de agregaciones no ponderadas mediante cuantificadores.

**Definición 55 (Propiedad de media)** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ ,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  finito, e **identidad**  $(Y) : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  el cuantificador semi-borroso definido como

$$\mathbf{identidad}(Y) = \frac{|Y|}{|E|}, Y \in \mathcal{P}(E)$$

Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de media para el cuantificador **identidad** si se cumple que

$$\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(X) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mu_X(e_j)$$

Nótese que los modelos que propagan la borrosidad en los argumentos no pueden verificar esta propiedad.

### Consecuencias de la propiedad

Una de las técnicas más utilizadas para decidir el cumplimiento conjunto de una serie de criterios es el cálculo de la media de los mismos. Gracias a esta propiedad podemos plantear la media de los grados de pertenencia mediante el cuantificador **identidad**, que representa simplemente la intuición “cuantos mas criterios se cumplan mejor”.

Nótese el contraste entre esta propiedad y la propiedad de propagación de la borrosidad. Mientras que los modelos que propagan la borrosidad no son viables para aplicaciones que necesiten el planteamiento de “agregaciones finas” de los grados de pertenencia, los modelos que cumplen la propiedad de media para el cuantificador identidad son especialmente indicados para esta tarea. En la sección 5 hemos analizado el uso de cuantificación borrosa en recuperación de información, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico. Todos los modelos de cuantificación con los que hemos experimentado verifican la propiedad de media para el cuantificador de identidad y con todos ellos hemos obtenido buenos resultados. No hemos experimentado con ningún DFS que verifique la propiedad de propagación de la borrosidad [47, capítulo 7], porque tal como hemos explicado, estos modelos no son adecuados para este tipo de problemas.

### Propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores

Imaginemos que utilizamos una serie de cuantificadores semi-borrosos ( “*alrededor o menos del 25 %*”, “*entre el 25 % y el 75 %*”, “*alrededor o más del 75 %*”) para dividir el universo de cuantificación<sup>31</sup>. Entonces, cuando los cuantificadores semi-borrosos se pueden interpretar de manera probabilística (intuitivamente, cuando las etiquetas asociadas se pueden interpretar como probabilidades en cada punto del universo de cuantificación), el cumplimiento de esta propiedad garantiza que los cuantificadores borrosos respectivos también se pueden interpretar de manera probabilística.

**Definición 56** Diremos que un conjunto de cuantificadores semi-borrosos  $Q_1, \dots, Q_r : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  forman un recubrimiento probabilístico del universo de cuantificación si

<sup>31</sup>Es decir, utilizamos *etiquetas lingüísticas* para calificar el universo de cuantificación.

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  se cumple que

$$Q_1(Y_1, \dots, Y_n) + \dots + Q_r(Y_1, \dots, Y_n) = 1$$

Por ejemplo, los cuantificadores semi-borrosos

$$\text{alrededor25 \%omenos}(Y) = T_{-\infty, 0, 1, 0, 2, 0, 3} \left( \frac{|Y|}{|E|} \right) \quad (1.10)$$

$$\text{entre25 \%y75 \%}(Y) = T_{0, 2, 0, 3, 0, 7, 0, 8} \left( \frac{|Y|}{|E|} \right)$$

$$\text{alrededor75 \%omás}(Y) = T_{0, 2, 0, 3, 0, 7, 0, 8} \left( \frac{|Y|}{|E|} \right)$$

forman un recubrimiento probabilístico del universo de cuantificación ya que se cumple

$$\text{alrededor25 \%omenos}(Y) + \text{entre25 \%y75 \%}(Y) + \text{alrededor75 \%omás}(Y) = 1$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$ .

**Definición 57** Diremos que un QFM  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores si para todo recubrimiento probabilístico del referencial  $Q_1, \dots, Q_r : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se cumple que

$$\mathcal{F}(Q_1)(X_1, \dots, X_n) + \dots + \mathcal{F}(Q_r)(X_1, \dots, X_n) = 1$$

para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

### Consecuencias de la propiedad

Esta propiedad es muy interesante, ya que nos permite describir el resultado de evaluar una sentencia cuantificada como una función de probabilidad sobre las etiquetas asociadas a los cuantificadores. Por ejemplo, si  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  son las etiquetas asociadas a los cuantificadores definidos en la expresión 1.10 y  $\mathcal{F}$  es un QFM que cumple la propiedad anterior se asegura que

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\text{alrededor25 \%omenos})(X) + \mathcal{F}(\text{entre25 \%y75 \%})(X) + \\ &\quad + \mathcal{F}(\text{alrededor75 \%omás})(X) = 1 \end{aligned}$$

para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ . De esta manera podemos interpretar

$$\Pr(\beta_1) = \mathcal{F}(\text{alrededor } 25\% \text{ o menos})(X)$$

$$\Pr(\beta_2) = \mathcal{F}(\text{entre } 25\% \text{ y } 75\%)(X)$$

$$\Pr(\beta_3) = \mathcal{F}(\text{alrededor } 75\% \text{ o más})(X)$$

Aunque desde puntos de vista distintos a los planteados en esta memoria, en [63] también se utiliza una interpretación probabilística de los cuantificadores<sup>32</sup>. En dicha referencia los puntos de probabilidad pueden ser conjuntos de cuantificadores (p.e., la probabilidad de  $\{\beta_1, \beta_2\}$  podría ser 0,6) en vez de los cuantificadores en sí como en la definición de la propiedad anterior. En [63] se plantea la realización de razonamientos silogísticos con cuantificadores pero no la evaluación de expresiones cuantificadas borrosas, por lo que dicho trabajo no se solapa con el de esta memoria.

### Otras consideraciones

Una propiedad que no hemos considerado es la propiedad de convexidad [47, sección 6.6]. Esta propiedad establece que si un cuantificador semi-borroso es convexo (por ejemplo, un cuantificador unario definido a partir de un número borroso unimodal) entonces el cuantificador borroso correspondiente también debe ser convexo. No se ha considerado esta propiedad por ser un criterio “demasiado restrictivo” para los DFSs. En [47, sección 6.6] se establece que ningún DFS puede cumplir la propiedad de convexidad en su forma general. Particularmente, sólo uno de los modelos definidos en [47] es capaz de satisfacer una versión menos restrictiva de la propiedad de convexidad en la que se restringe la misma a cuantificadores unarios y dominios finitos.

Otro aspecto que nos parece importante destacar es que no se puede cumplir la propiedad de continuidad en los argumentos para conjuntos infinitos numerables cuando trabajamos con QFM que verifican la propiedad de coherencia con la lógica para una tnorma distinta del mínimo y una tconorma distinta del máximo.

**Proposición 2** *Sea  $\mathcal{F}$  un QFM que cumple la propiedad de coherencia con la lógica para una tconorma distinta del máximo. Entonces  $\mathcal{F}$  no es continuo en los argumentos para referenciales infinitos numerables.*

<sup>32</sup>Realmente de los números borrosos proporcionales asociados a los cuantificadores.

**Demostración.** Sea  $E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$  el conjunto referencial, y  $X, X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos con funciones de pertenencia constante:

$$\begin{aligned}\mu_X(e) &= \delta \\ \mu_{X'}(e) &= 0\end{aligned}$$

para todo  $e \in E^m$ . Entonces para  $\delta > 0$  y siendo  $\mathcal{F}$  un QFM que cumpla la propiedad de coherencia con la lógica para una tconorma  $\tilde{\vee}$  distinta del máximo tendremos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{F}(\exists_{E^m})(X)) = 1$$

debido al comportamiento agregativo de las tconormas distintas del máximo. Esto es, para todo  $\delta > 0$  podemos obtener un resultado tan cercano a 1 como deseemos con tal de hacer  $m$  lo “suficientemente” grande. Pero cuando  $\delta = 0$  tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{F}(\exists_{E^m})(X')) = 0$$

ya que  $X' = \emptyset$ . Nótese que  $d(X, X')$  se puede hacer tan cercano a 0 como se desee.

■

Como consecuencia, no es posible definir DFSs no estándar continuos en el caso infinito numerable.

## 1.5. Análisis de las aproximaciones a la cuantificación borrosa

En este apartado vamos a analizar las propuestas más relevantes para la evaluación de sentencias cuantificadas borrosas. Puesto que este no es el primer análisis crítico que se realiza del campo, hemos decidido integrar los resultados más importantes de los que consideramos los tres análisis más serios llevados a cabo hasta el momento: el realizado por Delgado et al. en [22, 80], el realizado por Barro et al. en [4] y el realizado por Glöckner en [42], [45, apéndice A], [47, apéndice A]. Como punto novedoso, en el análisis hemos añadido las aproximaciones de Delgado et al. [19–22, 80]<sup>33</sup>, tanto posibilísticas como probabilísticas, así como las aproximaciones de Glöckner basadas en conjuntos trivaluados [41, 45, 47, 50].

<sup>33</sup>La tesis doctoral de Daniel Sánchez [80] recopila los resultados más importantes que se presentan en estos trabajos.

En [22, 80] se analizan la aproximación de Zadeh basada en la medida de cardinalidad  $\sum Count$  [103]; la aproximación unaria de Zadeh basada en la medida de cardinalidad FGCount [103]; la aproximación de Yager basada en OWA unaria [93, 95, 96] y su extensión binaria definida en [95]; y el método de Vila et al. [89]. Los distintos modelos se contrastan contra la lista de propiedades definida en [22, 80], que aunque no es tan rigurosa como la derivada del marco axiomático de Glöckner, si es suficientemente crítica como para detectar algunos de los problemas más importantes de los modelos mencionados.

El análisis planteado en [4] presenta algunas novedades con respecto a los trabajos de Delgado et al. Por una parte es un análisis más crítico con los modelos de cuantificación, ya que el conjunto de propiedades manejadas son en su mayoría consecuencia del marco axiomático de Glöckner. Por otra, se incluyen algunos modelos no analizados en [22, 80], como las aproximaciones de Yager planteadas en [93, 96], y las propuestas de Delgado et al. basadas en la extensión de la medida de cardinalidad relativa  $Z$  de Zadeh [20] y [22].

Por su parte Glöckner [42], [45, apéndice A], [47, apéndice A] divide el análisis en cuatro aproximaciones principales. La aproximación de Zadeh basada en  $\sum Count$  [103], la aproximación de Yager basada en OWA [93], la aproximación basada en la medida de cardinalidad FGCount y generalizaciones [94, 98, 103], y la aproximación basada en la medida de cardinalidad FECCount [78].

La crítica que se realiza en este apartado maneja principalmente el conjunto de propiedades que se derivan del marco axiomático de los DFSs. Por este motivo vamos a comentar brevemente los fundamentos del análisis realizado en [47, apéndice A], donde se plantea el análisis de los modelos de evaluación de sentencias cuantificadas borrosas dentro del denominado “*marco de evaluación de las aproximaciones a la cuantificación borrosa*”. Dado que la aproximación a la cuantificación borrosa basada en QFMs es más general que la propuesta basada en la dicotomía absoluto/relativa de Zadeh, Glöckner plantea la construcción de QFMs parciales a partir de los distintos modelos de cuantificación borrosa. De esta manera al menos es posible analizar las propiedades del marco basado en cuantificadores semi-borrosos que cumplen estos QFMs parciales.

Siguiendo la notación planteada en [47, sección A.2], denotaremos por  $\mathcal{Z}$  un modelo de cuantificación borrosa en el sentido de Zadeh. Este modelo nos permitirá modelar, en el mejor de los casos, expresiones unarias absolutas (caso  $\mathcal{Z}_{abs}^{(1)}$ ,

“alrededor de 3 son rojos”) basadas en una función de soporte del tipo  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$ ; expresiones unarias relativas (caso  $\mathcal{Z}_{prp}^{(1)}$ , “la proporción de rojos es cercana al 30 %”) basadas en una función de soporte del tipo  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ ; expresiones binarias absolutas (caso  $\mathcal{Z}_{abs}^{(2)}$ , “alrededor de 3 estudiantes jóvenes son ricos”), también basadas en una función de soporte del tipo  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$ ; y expresiones binarias proporciones (caso  $\mathcal{Z}_{prp}^{(2)}$ , “alrededor del 30 % de los estudiantes jóvenes son ricos”) basadas en un número borroso proporcional  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ .

Para poder construir un QFM parcial  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}$  a partir de un modelo de cuantificación  $\mathcal{Z}$  es necesario redefinir los modelos para que puedan actuar sobre cuantificadores semi-borrosos. Esto puede conseguirse si primeramente construimos el cuantificador semi-borroso asociado a un cuantificador dado y seguidamente asumimos que el cuantificador borroso es la imagen del cuantificador semi-borroso en cuestión. Por ejemplo, para el caso  $\mathcal{Z}_{prp}^{(2)}$ , que opera sobre números borrosos proporcionales  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ , construimos primeramente el cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  asociado a  $\mathcal{Z}_{prp}^{(2)}(\mu_Q)$ ; esto es, definimos

$$Q(Y_1, Y_2) = \mathcal{Z}_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(Y_1, Y_2) \quad (1.11)$$

con  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  nítidos. Y a partir del cuantificador semi-borroso  $Q$  establecemos un QFM parcial haciendo

$$\mathcal{F}^{\mathcal{Z}_{prp}^{(2)}}(Q)(X_1, X_2) = \mathcal{Z}_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) \quad (1.12)$$

El requerimiento mínimo exigible a un modelo de cuantificación  $\mathcal{Z}$  es que el procedimiento anterior sea funcional  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}(Q) = \mathcal{Z}(\mu_Q)$ ; es decir, que distintos cuantificadores borrosos no tengan asociado el mismo cuantificador semi-borroso. De otra manera, exigimos que sea coherente con la “hipótesis del marco de evaluación” (véase la sección 1.3.2). Pese a ello algunas propuestas para la cuantificación borrosa violan este requerimiento<sup>34</sup>.

<sup>34</sup>Este requerimiento es completamente natural ya que en la aproximación a la cuantificación basada en QFMs sólo se especifican los cuantificadores semi-borrosos, recayendo la tarea de la construcción de cuantificadores borrosos en los QFMs. Bajo esta operativa no es razonable que un modelo  $\mathcal{F}$  pueda plantear distintos cuantificadores borrosos para un único cuantificador semi-borroso. Un ejemplo de un modelo que no cumple la hipótesis del marco de evaluación es el modelo de Zadeh. Por ejemplo, para cuantificadores unarios absolutos, dos funciones de soporte  $\mu_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{I}$   $\mu_{Q'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{I}$  tales que  $\mu_Q(x) = \mu_{Q'}(x)$  si  $x \in \mathbb{N}$  y  $\mu_Q(x) \neq \mu_{Q'}(x)$  si  $x \notin \mathbb{N}$  tendrán asociado un mismo cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  pero  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}(Q)$  no puede estar asociado a la vez a  $\mu_Q(x)$  y  $\mu_{Q'}(x)$ . Daremos más detalles en el análisis de este modelo.

Una vez hemos definido un QFM parcial  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}$  a partir de un modelo  $\mathcal{Z}$  es en general sencillo adaptar las propiedades derivadas del marco axiomático para evaluar su cumplimiento por parte de  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}$ . Para ello simplemente tenemos que adaptar las mismas a  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}$ , entendiéndose que dado que  $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}}$  no es un QFM completo, no todas ellas pueden ser aplicables, y que aún en caso de serlo, su generalidad es menor que en el caso de trabajar con un verdadero QFM.

En general, no haremos excesivo énfasis en la hipótesis del marco de evaluación, referenciando en ocasiones el trabajo [47, sección A.2] para la consulta de algunos casos problemáticos. En todo caso, los modelos analizados que no cumplen la hipótesis del marco presentan tales defectos teóricos que la hipótesis del marco casi se convierte en un problema menor.

En el análisis nos limitaremos a los casos absoluto unario  $\mathcal{Z}_{abs}^{(1)}$  y relativo proporcional  $\mathcal{Z}_{prp}^{(2)}$ . En la bibliografía normalmente no se definen los otros casos explícitamente, tal como se explicó en la sección 1.1.

Recordemos que el caso unario proporcional se suele plantear a partir del caso binario proporcional mediante la siguiente expresión:

$$\mathcal{Z}_{prp}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \mathcal{Z}_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(E, X)$$

Y para el caso binario absoluto se utiliza un procedimiento similar:

$$\mathcal{Z}_{abs}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) = \mathcal{Z}_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X_1 \tilde{\cap} X_2)$$

Además, como las aproximaciones que se van a analizar en este apartado utilizan números borrosos para especificar los cuantificadores vamos a introducir los siguientes números borrosos:

$$\mu_{\exists}(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}, x \in \mathbb{N}$$

$$\mu_{\forall}(x) = \begin{cases} 0 & : x < 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}, x \in [0, 1]$$

que se pueden utilizar para definir los cuantificadores clásicos  $\exists : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$ ,  $\forall :$

$\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$ , **algún**:  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{2}$  y **todos**:  $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{2}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\exists(Y) &= \mu_{\exists}(|Y|) \\ \forall(Y) &= \mu_{\forall}\left(\frac{|Y|}{|E|}\right) \\ \mathbf{algún}(Y_1, Y_2) &= \mu_{\exists}(|Y_1 \cap Y_2|) \\ \mathbf{todos}(Y_1, Y_2) &= \mu_{\forall}\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}\right)\end{aligned}$$

### 1.5.1. Modelo de Zadeh basado en $\sum\text{count}$

La propuesta de Zadeh [103], [108] basada en la medida de cardinalidad escalar  $\sum\text{Count}$  es sin duda la aproximación más conocida y más utilizada para la evaluación de sentencias cuantificadas borrosas. Pese a ello el comportamiento teórico de la aproximación es muy débil y ha recibido numerosas críticas.

A continuación se define la medida de cardinalidad escalar de un conjunto borroso [69]:

**Definición 58** ( $\sum\text{Count}$ ) *Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La medida de cardinalidad borrosa  $\sum\text{Count}$  se define como*

$$\sum\text{Count}(X) = \sum_{e \in E} \mu_X(e) \quad (1.13)$$

En [108, pág 579] Zadeh propone utilizar la siguiente extensión de la medida de cardinalidad  $\sum\text{Count}$  para medir la cardinalidad relativa de dos conjuntos borrosos:

**Definición 59** ( $\sum\text{Count}(X_2|X_1)$ ) *Sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  dos conjuntos borrosos. La medida de cardinalidad relativa  $\sum\text{Count}(X_2|X_1)$  se define como*

$$\sum\text{Count}(X_2|X_1) = \frac{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e) \wedge \mu_{X_2}(e)}{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e)} \quad (1.14)$$

A partir de la medida de cardinalidad  $\sum\text{Count}$  Zadeh realiza la siguiente propuesta para evaluar sentencias cuantificadas unarias:

**Definición 60** Sea  $\mu_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo  $Z_{abs}^{(1)}$  para cuantificadores unarios absolutos se define como:

$$Z_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \mu_Q\left(\sum \text{Count}(X)\right)$$

Y para cuantificadores proporcionales:

**Definición 61** Sea  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso binario proporcional,  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos. El modelo  $Z_{prp}^{(2)}$  para cuantificadores binarios proporcionales se define como:

$$Z_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) = \mu_Q\left(\sum \text{Count}(X_2|X_1)\right)$$

Nótese que la expresión anterior está indefinida para  $X_1 = \emptyset$ .

La crítica más habitual al modelo de Zadeh es su comportamiento agregativo [97, pág. 257], [47, pág. 394], [4, pág. 94.]. Como consecuencia de este comportamiento, el efecto de varios elementos con un grado de pertenencia bajo puede ser el mismo que el efecto de un único elemento con un grado de pertenencia alto. Veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 7** *Considérense los siguientes conjuntos borrosos:*

$$X = \left\{ \frac{1}{5}/e_1, \frac{1}{5}/e_2, \frac{1}{5}/e_3, \frac{1}{5}/e_4, \frac{1}{5}/e_5 \right\}$$

$$X' = \{1/e_1, 0/e_2, 0/e_3, 0/e_4, 0/e_5\}$$

Entonces

$$Z_{(abs)}^{(1)}(\exists)(X) = Z_{(abs)}^{(1)}(\exists)(X') = 1$$

Sin embargo, el comportamiento agregativo no es el principal problema del modelo basado en  $\sum \text{Count}$ . En el ejemplo que se acaba de presentar el resultado sería razonable si interpretásemos que el cuantificador existencial se modela a través de la tconorma de Lukasiewicz  $\vee(x_1, x_2) = \min(1, x_1 + x_2)$ . No obstante, el modelo de Zadeh presenta otras muchas deficiencias que hacen parecer el comportamiento agregativo un problema menor.

En [47, pág 394.] se realiza la crítica de que el modelo de Zadeh no es coherente con la hipótesis del marco de evaluación (véase la sección 1.3.2). Por ejemplo, si consideramos dos funciones de soporte  $\mu_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $\mu_{Q'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{I}$  tales que  $\mu_Q(x) = \mu_{Q'}(x)$  si  $x \in \mathbb{N}$  y  $\mu_Q(x) \neq \mu_{Q'}(x)$  si  $x \notin \mathbb{N}$  entonces utilizando la expresión 1.13 para construir los cuantificadores borrosos asociados a  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_Q)$  y  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_{Q'})$  tendremos que

$$Q(Y) = Z_{abs}^{(1)}(\mu_Q) = Z_{abs}^{(1)}(\mu_{Q'})$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$  nítido, como consecuencia de que para cardinalidades enteras  $\mu_Q(x) = \mu_{Q'}(x)$ . Pero los cuantificadores borrosos  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_Q)$  y  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_{Q'})$  son distintos. De esta manera tenemos dos cuantificadores borrosos asociados a un mismo cuantificador semi-borroso.

Otra crítica muy importante del modelo de Zadeh es que si la función de soporte es nítida entonces los resultados del modelo también son nítidos, independiente de la borrosidad de los argumentos. Considérese el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 8** Sea  $E = \{e_1, e_2\}$  el conjunto referencial y  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Entonces

$$Z_{abs}^{(1)}(\mu_{\forall})(X) = \begin{cases} 0 & : \mu_X(e_1) + \mu_X(e_2) < 2 \\ 1 & : \mu_X(e_1) = \mu_X(e_2) = 1 \end{cases}$$

Y para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$   $Z_{abs}^{(1)}(\mu_{\forall})(X) = 0$  ó  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_{\forall})(X) = 1$ . Además, el ejemplo anterior también demuestra que el modelo de Zadeh no es coherente con la lógica. Nótese que  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_{\forall})(X)$  debiera inducir una tnorma para un referencial de dos elementos, pero  $Z_{abs}^{(1)}(\mu_{\forall})(\{1/e_1, 0,5/e_2\}) = 0$ , y toda tnorma cumple que  $\wedge(1, x) = x$ .

Estos hechos fueron observados independientemente en [80, pág. 76.] y [42], [47, pág. 395]. Además, en [47, pág. 395] se realizan consideraciones adicionales que demuestran que la relajación del cuantificador universal no soluciona el problema planteado.

El ejemplo anterior también demuestra otro problema grave del modelo de Zadeh, su discontinuidad. La propiedad de continuidad es de suma importancia para las aplicaciones. Por una parte todo proceso está sometido a errores de medida, por lo que las deficiencias en la calidad de los datos podrían ocasionar análisis completamente distintos. Por otra es muy difícil interpretar que dos observaciones con

diferencias no significativas produzcan distintas salidas, tanto desde el punto de vista del usuario (que no sería capaz de entender la causa de las diferencias) como desde el punto de vista de las aplicaciones (imagínese por ejemplo la utilización de un modelo discontinuo en un sistema de control).

Otro problema mencionado en [47, pág. 396] es la violación de la propiedad de negación interna. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 9** Sean los conjuntos borrosos  $X_1 = \{0,8/e_1\}$ ,  $X_2 = \{0,2/e_1\}$ . Entonces<sup>35</sup>

$$\begin{aligned} Z_{prp}^{(2)}(\mu_{\forall})(X_1, \simeq X_2) &= \mu_{\forall} \left( \frac{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e) \wedge \mu_{\simeq X_2}(e)}{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e)} \right) \\ &= \mu_{\forall} \left( \frac{0,8}{0,8} \right) \\ &= 1 \\ Z_{prp}^{(2)}(\mu_{\forall \neg})(X_1, X_2) &= \mu_{\forall \neg} \left( \frac{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e) \wedge \mu_{X_2}(e)}{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e)} \right) \\ &= \mu_{\forall \neg} \left( \frac{0,2}{0,8} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como conclusión, el modelo de Zadeh presenta numerosas deficiencias para el modelado de expresiones cuantificadas borrosas.

---

<sup>35</sup>Recordemos que la definición del número borroso absoluto  $\mu_{\forall} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  es

$$\mu_{\forall}(x) = \begin{cases} 0 & : x < m \\ 1 & : x = m \end{cases}$$

donde  $m$  es la cardinalidad del referencial. En el caso proporcional  $\mu_{\forall} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  se define como

$$\mu_{\forall}(x) = \begin{cases} 0 & : x < 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$$

$\mu_{\forall \neg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  es el antónimo de  $\mu_{\forall}$ , definido como

$$\mu_{\forall \neg}(x) = \begin{cases} 0 & : x > 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

### 1.5.2. Modelo de Yager basado en OWA

En [93, 95, 96] Yager propone distintas expresiones para evaluar sentencias cuantificadas utilizando operadores OWA. Estas aproximaciones, aunque tienen un comportamiento adecuado para cuantificadores unarios, presentan un comportamiento muy débil para cuantificadores binarios. Se pueden encontrar críticas muy duras a las propuestas de Yager [93] y [96] respectivamente en [42], [47, sección A.4.] y en [4, pág. 95]. Por su parte, en [22, pág. 32], [80, pág. 78] se hace una crítica igualmente definitiva a la propuesta planteada en [95]. En este apartado comentaremos los problemas de los modelos planteados en [93] y [96]. La estructura de los mismos es muy similar y ambos presentan las mismas deficiencias.

Para poder presentar los modelos mencionados introduciremos primeramente los operadores de agregación OWA.

Un operador OWA es un operador de agregación  $m$ -ario  $OWA^W : \mathbf{I}^m \rightarrow \mathbf{I}$  asociado a un conjunto de pesos  $W = [w_1, \dots, w_m]$  en el que se tiene en cuenta el orden de los elementos, de manera que el primer peso se aplica al mayor argumento del operador, el segundo peso al segundo mayor y así sucesivamente. Formalmente un operador OWA se define de la siguiente manera:

**Definición 62** [93, pág. 184] *El operador  $OWA^W : \mathbf{I}^m \rightarrow \mathbf{I}$  asociado al vector de pesos  $W = [w_1, \dots, w_m]$  se define como*

$$OWA^W(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot b_i$$

donde  $b_i$  es el  $i$ -mayor elemento del conjunto  $x_1, \dots, x_m$ .

La propuesta de Yager basada en OWA sólo es aplicable a cierto tipo de cuantificadores. Para cuantificadores unarios se restringe a aquellas expresiones definidas a partir de un número borroso proporcional  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  no decreciente tal que  $\mu_Q(0) = 0$  y  $\mu_Q(1) = 1$ . Yager denomina a este tipo de números borrosos *coherentes*.

**Definición 63** *Sea  $\mu_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo  $OWA_{abs}^{(1)}$  para cuantificadores unarios absolutos se define como:*

$$OWA_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot b_i$$

donde  $b_i$  es el  $i$ -mayor grado de pertenencia del conjunto  $X$ , y el vector de pesos  $W$  se define a partir de  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  haciendo:

$$w_i = \mu_Q(i) - \mu_Q(i-1)$$

Para evaluar sentencias cuantificadas definidas a partir de una función de soporte proporcional Yager realiza distintas propuestas. La idea general de las mismas se basa en plantear una agregación de los conjuntos borrosos argumento  $X_1, X_2$  basada en un parámetro (“grado de disyunción”<sup>36</sup>) que mide el comportamiento agregativo/disyuntivo del cuantificador. El grado de disyunción se utiliza para construir un único conjunto borroso  $Z$  al que ya se le puede aplicar el método planteado para el caso unario.

El grado de disyunción asociado a una función de soporte proporcional  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  coherente se define como:

$$orness(W) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (m-i) w_i$$

donde  $W = [w_1, \dots, w_m]$  es el vector de pesos asociado a  $\mu_Q$ , que en este caso se calculan como:

$$w_i = \mu_Q\left(\frac{i}{m}\right) - \mu_Q\left(\frac{i-1}{m}\right)$$

En sus trabajos Yager indica que el grado de disyunción de un cuantificador mide la similitud del mismo con respecto al cuantificador existencial, de forma que cuantificadores con un “comportamiento disyuntivo” tendrán un grado de disyunción alto, mientras que cuantificadores con un comportamiento conjuntivo tendrán un grado de disyunción bajo. Para el caso especial del cuantificador existencial  $orness(W) = 1$ , mientras que para el cuantificador universal resulta que  $orness(W) = 0$ .

Para la construcción del conjunto  $Z$  Yager plantea diferentes posibilidades. En [93, pág. 190] se propone (en nuestra notación):

$$\mu_{Z_1^\alpha}(e_i) = (\mu_{X_1}(e_i) \vee \approx \alpha) \mu_{X_2}(e_i)^{\mu_{X_1}(e_i) \vee \alpha} \quad (1.15)$$

donde el parámetro  $\alpha = 0$  es la medida de orness del cuantificador y se asume que  $0^0 = 1$ . El subíndice “1” en  $Z_1^\alpha$  se utiliza para diferenciar esta aproximación de la

<sup>36</sup>Según la traducción del término “orness” adoptada en [80, pág. 65].

segunda aproximación considerada [96, pág. 344], en la que se construye  $Z$  utilizando la expresión:

$$\mu_{Z_2^\alpha}(e_i) = (\tilde{\neg}\alpha \wedge \tilde{\neg}\mu_{X_1}(e_i)) \vee ((\tilde{\neg}\alpha \vee \mu_{X_1}(e_i)) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) \quad (1.16)$$

La definición del modelo de Yager basada en OWA para funciones de soporte proporcionales es la siguiente:

**Definición 64** Sea  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso binario proporcional,  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo  $OWA_{prp}^{(2)}$  para cuantificadores binarios proporcionales se define como:

$$OWA_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot b_i$$

donde  $b_i$  es el  $i$ -mayor grado de pertenencia del conjunto  $Z^\alpha$  (definido utilizando la expresión 1.15 ó 1.16) y el vector de pesos  $W$  se define a partir de  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  haciendo:

$$w_i = \mu_Q\left(\frac{i}{m}\right) - \mu_Q\left(\frac{i-1}{m}\right)$$

Nótese que (los subíndices distinguen entre las expresiones 1.15 y 1.16):

$$\begin{aligned} \mu_{Z_1^0}(e_i) &= (\mu_{X_1}(e_i) \vee \tilde{\neg}\alpha) \mu_{X_2}(e_i)^{\mu_{X_1}(e_i) \vee \alpha} \\ &= (\mu_{X_1}(e_i) \vee (1-0)) \mu_{X_2}(e_i)^{\mu_{X_1}(e_i) \vee 0} \\ &= \mu_{X_2}(e_i)^{\mu_{X_1}(e_i)} \\ \mu_{Z_1^1}(e_i) &= (\mu_{X_1}(e_i) \vee (1-1)) \mu_{X_2}(e_i)^{\mu_{X_1}(e_i) \vee 1} \\ &= \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i) \\ \mu_{Z_2^0}(e_i) &= (\tilde{\neg}\alpha \wedge \tilde{\neg}\mu_{X_1}(e_i)) \vee ((\tilde{\neg}\alpha \vee \mu_{X_1}(e_i)) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) \\ &= (1 \wedge \tilde{\neg}\mu_{X_1}(e_i)) \vee ((1 \vee \mu_{X_1}(e_i)) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) \\ &= \tilde{\neg}\mu_{X_1}(e_i) \vee (\mu_{X_1}(e_i) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) \\ \mu_{Z_2^1}(e_i) &= (\tilde{\neg}\alpha \wedge \tilde{\neg}\mu_{X_1}(e_i)) \vee ((\tilde{\neg}\alpha \vee \mu_{X_1}(e_i)) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) \\ &= ((1-1) \wedge \tilde{\neg}\mu_{X_1}(e_i)) \vee (((1-1) \vee \mu_{X_1}(e_i)) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) \\ &= \mu_{X_1}(e_i) \wedge \mu_{X_2}(e_i) \end{aligned}$$

De esta manera las generalizaciones del cuantificador existencial y universal son razonables. Para la expresión 1.15:

$$\begin{aligned} OWA_{abs}^{(1)}(\mathbf{alg\acute{u}n})(X_1, X_2) &= \sup \{ \mu_{X_1}(e) \mu_{X_2}(e) : e \in E \} \\ OWA_{abs}^{(1)}(\mathbf{todos})(X_1, X_2) &= \inf \{ \mu_{X_2}(e)^{\mu_{X_1}(e)} : e \in E \} \end{aligned}$$

y para la expresión 1.16:

$$\begin{aligned} OWA_{prp}^{(2)}(\mathbf{alg\acute{u}n})(X_1, X_2) &= \sup \{ \mu_{X_1}(e) \wedge \mu_{X_2}(e) : e \in E \} \\ OWA_{prp}^{(2)}(\mathbf{todos})(X_1, X_2) &= \inf \{ \sim \mu_{X_1}(e) \vee (\mu_{X_1}(e) \wedge \mu_{X_2}(e)) : e \in E \} \end{aligned}$$

Pero aunque las generalizaciones de los cuantificadores **algún** y **todos** sean aceptables, las dos aproximaciones presentan serias deficiencias que las hacen inviables en la práctica. En los siguientes ejemplos demostramos que ambas propuestas violan propiedades fundamentales. En el primero mostramos la violación de la propiedad de generalización correcta y en el segundo la violación de la propiedad de monotonía:

**Ejemplo 10** *Consideremos el siguiente ejemplo:*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{1, 1, 1, 0, 0\} \\ Y_2 &= \{1, 1, 0, 1, 1\} \\ \mathbf{m\acute{a}s\_del\_50}\% (Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} < 0,5 \\ 1 & : \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \geq 0,5 \end{cases} \end{aligned}$$

*El número borroso a partir de la cual se define el cuantificador es*

$$\mu_{50\%-o\_mas}(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0,5 \\ 1 & : x \geq 0,5 \end{cases}$$

*Como*

$$\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} = \frac{2}{3}$$

*se tiene que*

$$\mathbf{m\acute{a}s\_del\_50}\% (Y_1, Y_2) = 1$$

El grado de disyunción del cuantificador es

$$\begin{aligned} W &= [0, 0, 1, 0, 0] \\ \text{orness}(\mu_{50\%_{-o.más}}) &= \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (5-i) w_i \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Nótese que para la expresión 1.15 tenemos:

Si  $\mu_{X_1}(e_i) = 1$  y  $\mu_{X_2}(e_i) = 1$

$$\mu_{Z_1^{0,5}}(e_i) = (1 \vee (1 - 0,5)) \cdot 1^{1 \vee 0,5} = 1$$

Si  $\mu_{X_1}(e_i) = 1$  y  $\mu_{X_2}(e_i) = 0$

$$\mu_{Z_1^{0,5}}(e_i) = (1 \vee (1 - 0,5)) \cdot 0^{1 \vee 0,5} = 0$$

Si  $\mu_{X_1}(e_i) = 0$  y  $\mu_{X_2}(e_i) = 1$

$$\mu_{Z_1^{0,5}}(e_i) = (0 \vee (1 - 0,5)) \cdot 1^{0 \vee 0,5} = 0,5$$

Y se puede comprobar que para la expresión 1.16 se obtienen los mismos resultados.

Así,

$$Z_1^{0,5} = Z_2^{0,5} = \{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0,5/e_4, 0,5/e_5\}$$

y aplicando OWA se obtiene

$$\begin{aligned} OWA_{prp}^{(2)}(\mu_{50\%_{-o.más}})(Y_1, Y_2) &= \sum_{i=1}^5 w_i \cdot b_i \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

que es distinto de **más del 50%**  $(Y_1, Y_2) = 1$ .

Se demuestra ahora que los modelos planteados también violan la propiedad de monotonía en los cuantificadores:

**Ejemplo 11** *Considérense los conjuntos*

$$Y_1 = \{1, 1, 0, 0\}, Y_2 = \{1, 0, 1, 1\}$$

Vamos a considerar la aplicación de los modelos planteados a los cuantificadores definidos a partir de las siguientes funciones de soporte proporcionales:

$$\begin{aligned}\mu_{>0\%}(x) &= \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases} \\ \mu_{\geq \frac{100}{3}\%}(x) &= \begin{cases} 0 & : x < \frac{1}{3} \\ 1 & : x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{\geq \frac{200}{3}\%}(x) &= \begin{cases} 0 & : x < \frac{2}{3} \\ 1 & : x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \\ \mu_{\geq 100\%}(x) &= \begin{cases} 0 & : x < 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

La medida de disyunción asociada a los números borrosos anteriores es

$$\begin{aligned}\text{orness}(\mu_{>0\%}) &= \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (4-i) w_i = 1 \\ \text{orness}(\mu_{\geq \frac{100}{3}\%}) &= \frac{2}{3} \\ \text{orness}(\mu_{\geq \frac{200}{3}\%}) &= \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (4-i) w_i = \frac{1}{3} \\ \text{orness}(\mu_{\geq 100\%}) &= 0\end{aligned}$$

Calculamos el valor de  $Z_1^\alpha$  para los distintos valores de orness:

$$\begin{aligned}Z_1^1 &= (\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\} \vee \{0/e_1, 0/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) \cdot \\ &\quad \{1/e_1, 0/e_2, 1/e_3, 1/e_4\}^{\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\} \vee \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3, 1/e_4\}} \\ &= \{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\} \cdot \{1/e_1, 0/e_2, 1/e_3, 1/e_4\} = \{1/e_1, 0/e_2, 0/e_3, 0/e_4\} \\ Z_1^{\frac{2}{3}} &= \left\{1/e_1, 0/e_2, \frac{1}{3}/e_3, \frac{1}{3}/e_4\right\} \\ Z_1^{\frac{1}{3}} &= \left\{1/e_1, 0/e_2, \frac{2}{3}/e_3, \frac{2}{3}/e_4\right\} \\ Z_1^0 &= \{1/e_1, 0/e_2, 1/e_3, 1/e_4\}\end{aligned}$$

Para  $Z_2^\alpha$  se obtienen idénticos resultados. De esta manera:

$$\begin{aligned}
 OWA_{prp}^{(2)}(\mu_{>0\%})(Y_1, Y_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \\
 OWA_{prp}^{(2)}\left(\mu_{\geq \frac{100}{3}\%}\right)(Y_1, Y_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \\
 OWA_{prp}^{(2)}\left(\mu_{\geq \frac{200}{3}\%}\right)(Y_1, Y_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \\
 OWA_{prp}^{(2)}(\mu_{\geq 100\%})(Y_1, Y_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

que demuestra claramente el no cumplimiento de la propiedad de monotonía en los cuantificadores.

El no cumplimiento de las propiedades de generalización correcta y monotonía es suficiente para descartar la utilización de las propuestas de Yager expuestas en [93] y [96] para cuantificadores proporcionales binarios. Pero tal como expone Glöckner en [42], [47, sección A.4.] en su análisis del modelo basado en la expresión 1.15, las aproximaciones anteriores tienen otras muchas deficiencias que desaconsejan su utilización. Mencionamos a continuación algunos de los problemas más graves expuestos en [47, sección A.4.]. Primeramente, es importante señalar que el grado de disyunción no está definido para conjuntos de un elemento ( $E = \{e_1\}$ ) por lo que no está claro como se debe extender la propuesta a esta situación. También es muy importante que las aproximaciones expuestas violan la propiedad de extensión (véase el último apartado de la sección 1.4.1). Como consecuencia del no cumplimiento de esta propiedad los elementos irrelevantes tienen importancia en la evaluación de las expresiones cuantificadas. Por ejemplo, en la evaluación de la sentencia “*pocas tele-series de calidad tienen una audiencia alta*” se pueden obtener distintos resultados en función del número de, digamos “*vehículos*”, que contiene el referencial, lo cual

es claramente inaceptable. Además en [47, sección A.4.] también se menciona que la aproximación basada en OWA no es capaz de cumplir la propiedad de conservatividad incluso en el caso semi-borroso (problema relacionado con el no cumplimiento de la propiedad de generalización correcta). Asimismo, en la referencia anterior también se comenta que las posibles ampliaciones de los modelos anteriores para tratar cuantificadores proporcionales definidos a partir de números borrosos decrecientes chocan con las propiedades de antonimia y dualidad.

### 1.5.3. Cuantificación basada en la medida FG-Count

En este apartado analizamos las propuestas basadas en la medida de cardinalidad FG-Count [108]. La utilización de esta medida en el caso unario ha sido propuesta en [108, pág. 597] y en [98, pág. 225]. Por su parte, la propuesta para cuantificadores binarios proporcionales que se analiza en esta sección se ha presentado en [94, pág. 72] y en [100, pág. 398].

En [42], [47, sección A.4.] y en [4, pág. 95] se analizan estas aproximaciones. La crítica planteada en [47, sección A.4.] al caso binario proporcional es muy dura y de una exposición impecable, por lo que en el desarrollo de esta sección vamos a reproducir algunos de los resultados principales de este trabajo.

Presentamos a continuación la medida de cardinalidad FG-Count [108]:

**Definición 65 (FG-Count)** *Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La medida de cardinalidad borrosa FG-Count se define como*

$$\begin{aligned}\mu_{FG-Count(X)}(j) &= \sup \{ \alpha \in [0, 1] : |X_{\geq \alpha}| \geq j \} \\ &= \mu_{[j]}(X)\end{aligned}$$

La medida de cardinalidad  $\mu_{FG-Count}(j)$  se interpreta como el grado en el que el conjunto borroso  $X$  tiene al menos  $j$  elementos.

En [103, pág. 597], [98, pág. 225] se propone utilizar la medida de cardinalidad *FG-Count* para evaluar sentencias cuantificadas unarias<sup>37</sup>:

<sup>37</sup>Entre otras ideas en [98] también se dan ejemplos de como utilizar la medida de cardinalidad *FL-Count* para un cuantificador decreciente y la medida *FE-Count* para un cuantificador unimodal.

**Definición 66** Sea  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo *FG-Count* para sentencias cuantificadas unarias se define como

$$FG_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \max_{j=0, \dots, m} \mu_Q(j) \wedge \mu_{[j]}(X) \quad (1.17)$$

Aunque Zadeh no especifica la clase de cuantificadores que se pueden utilizar con la cardinalidad *FG-Count* Yager indica que el modelo planteado sólo se puede utilizar con cuantificadores coherentes. Esto es razonable, ya que  $\mu_{FG-Count}(j)$  mide el grado en que  $X$  tiene al menos  $j$  elementos. Nótese que se cumple que  $\mu_{FG-Count}(0) = 1$  para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  (todo conjunto borroso tiene al menos 0 elementos) por lo que el resultado de la expresión 1.17 es 1 para todo  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  tal que  $\mu_Q(0) = 1$ .

En [47, pág. 405] se matiza este hecho y se indica que independientemente del cuantificador,  $FG^{(1)}(\mu_Q)$  es una función monótona no decreciente. Nótese que para cualesquiera  $X, X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  tales que  $X \subseteq X'$  se cumple que  $FG-Count(X) \subseteq FG-Count(X')$  y como consecuencia  $FG_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) \leq FG_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X')$ .

Yager propone modelar cuantificadores no crecientes por medio de las propiedades de negación interna y externa, y modelar casos más complicados por medio de combinaciones booleanas de cuantificadores monótonos; pero en [47, pág. 405] Glöckner muestra que esta aproximación tampoco es válida, ya que se pueden obtener distintos resultados para distintas descomposiciones de los cuantificadores<sup>38</sup>.

Del razonamiento anterior se extrae que la aproximación definida en 1.17 no es válida para modelar cuantificadores que no sean coherentes. Pero para el caso de cuantificadores coherentes la aproximación anterior es correcta. Como veremos en el análisis de las propuestas planteadas por Glöckner el modelo  $\mathcal{M}_{CX}$  [47, sección 7.13] generaliza la expresión 1.17 para cuantificadores coherentes.

En [94, pág. 74] Yager propone el siguiente modelo para evaluar sentencias cuantificadas definidas a partir de números borrosos proporcionales:

**Definición 67** Sea  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario proporcional,  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos. El modelo  $FG_{pp}^{(2)}$

<sup>38</sup>En general no es evidente como descomponer un cuantificador. Considérese por ejemplo la descomposición del cuantificador definido a partir de la función de soporte constante  $\mu_Q(x) = 1, x \in [0, 1]$ .

para sentencias cuantificadas proporcionales se define como:

$$FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) = \max \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{\sum_{e \in S} \mu_{X_1}(e)}{\sum_{e \in E} \mu_{X_1}(e)} \right), H_S \right) : S \in \mathcal{P}(E) \right\} \quad (1.18)$$

donde  $H_S = \min \{ \max(1 - \mu_{X_1}(e), \mu_{X_2}(e)) : e \in S \}$ .

Nótese que esta expresión generaliza la aproximación definida en la expresión 1.17 al caso binario ya que

$$\begin{aligned} FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(E, X) &= \max \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{\sum_{e \in S} \mu_E(e)}{\sum_{e \in E} \mu_E(e)} \right), H_S \right) : S \in \mathcal{P}(E) \right\} \\ &= \max \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{|S|}{|E|} \right), H_S \right) : S \in \mathcal{P}(E) \right\} \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} H_S &= \min \{ \max(1 - \mu_E(e), \mu_X(e)) : e \in S \} \\ &= \min \{ \max(0, \mu_X(e)) : e \in S \} \\ &= \min \{ \mu_X(e) : e \in S \} \end{aligned}$$

entonces  $FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(E, X)$  resulta

$$\begin{aligned} &FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(E, X) \\ &= \max \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{|S|}{|E|} \right), \min \{ \mu_X(e) : e \in S \} \right) : S \in \mathcal{P}(E) \right\} \\ &= \max_{j=0}^m \left\{ \max \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{j}{m} \right), \min \{ \mu_X(e) : e \in S \} \right) : S \in \mathcal{P}(E) \wedge |S| = j \right\} \right\} \\ &= \max_{j=0}^m \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{j}{m} \right), \mu_{[j]}(X) \right) \right\} \end{aligned}$$

La propuesta  $FG_{prp}^{(2)}$  ha sido duramente criticada en [47, sección A.5.]. El primer problema de la propuesta anterior es que la expresión

$$FG_{prp}^{(2)}(\emptyset, X_2)$$

está indefinida para todo  $X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Pero existen problemas más graves. El siguiente contraejemplo [4, pág. 95] (muy similar al planteado en [42], [47, pág. 407]) demuestra que la aproximación anterior viola las propiedades de continuidad y monotonía:

**Ejemplo 12** *Considérense los siguientes conjuntos borrosos*

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3\}, X'_1 = \{1/e_1, 1/e_2, \lambda/e_3\}, X''_1 = \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3\} \\ X_2 &= \{1/e_1, 0/e_2, 0/e_3\} \end{aligned}$$

donde  $\lambda > 0$ , y la siguiente función de soporte

$$\mu_Q(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & : x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) &= 0 \\ FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X'_1, X_2) &= 1 - \lambda \\ FG_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X''_1, X_2) &= 0 \end{aligned}$$

con lo que se demuestra la violación de las propiedades de continuidad y monotonía.

Además de otros problemas, en [47, sección A.5.] también se argumenta que el modelo sólo es adecuado para manejar cuantificadores no decrecientes, y que la posible extensión del modelo utilizando las relaciones de negación externa y antonimia viola la propiedad de dualidad.

Como comentario final a esta aproximación, decir que en [100] se generalizan ambos modelos utilizando tnormas y tconormas distintas de los operadores estándar. En el apartado 1.5.8 se realizan algunas críticas acerca de esta aproximación.

#### 1.5.4. Aproximación basada en la cardinalidad $Z$ de Zadeh de Delgado et al.

En este apartado analizamos la propuesta de Delgado et al. [80], [20], [22] basada en la medida de cardinalidad  $Z$  de Zadeh [103] y su generalización al caso proporcional. Pese a que el modelo que se va a presentar tiene el encanto de ser compatible con el principio de extensión, el análisis realizado en [4, pág. 97] demuestra que este modelo tiene algunas deficiencias importantes.

La medida de cardinalidad borrosa  $Z$  se define en [107, pág. 166]:

**Definición 68** ( $Z$ ) Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La medida de cardinalidad  $Z$  se define como

$$\mu_{Z(X)}(j) = \begin{cases} 0 & : \neg \exists \alpha |X_{\geq \alpha}| = j \\ \sup \{ \alpha : |X_{\geq \alpha}| = j \} & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

La medida de cardinalidad  $Z$  es coherente con el principio de extensión cuando interpretamos los conjuntos borrosos a partir de sus alfa-cortes [105]. Pese a ello esta medida de cardinalidad ha sido criticada en [36, págs. 204-205] debido a que *no es convexa* y a que no cumple la *propiedad de aditividad*<sup>39</sup>.

En [80, capítulo 2] se defiende la medida de cardinalidad  $Z$  y se aboga que la pérdida de la propiedad aditiva no es, en realidad, un problema demasiado importante, y más teniendo en cuenta que la propuesta es coherente con el principio de extensión. Además, en [80, sección 2.4.1.], [20, pág. 195], [22, pág. 36] los autores proponen la siguiente definición de cardinalidad relativa (en nuestra notación):

**Definición 69 (Cardinalidad relativa  $Z$ )** Sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos. La medida de cardinalidad relativa  $Z$  se define como

$$\mu_Z(q) = \begin{cases} 0 & : \neg \exists \alpha \frac{|(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}|}{|(X_1)_{\geq \alpha}|} = q \\ \sup \left\{ \alpha : \frac{|(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}|}{|(X_1)_{\geq \alpha}|} = q \right\} & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

El planteamiento de la cardinalidad  $Z$  también se puede interpretar a partir del principio de extensión.

Se podría pensar que la expresión anterior es la misma que la planteada por Zadeh en [108, pág. 159] como extensión de la cardinalidad  $FG$ , pero en dicho trabajo Zadeh comenta que dicha extensión debe interpretarse como un multiconjunto borroso, aunque no explica como se puede utilizar dicho multiconjunto para evaluar sentencias cuantificadas.

A partir de la medida de cardinalidad  $Z$  los autores proponen la siguiente expresión para evaluar sentencias con cuantificadores unarios [80, sección 3.3.3.], [20, pág. 195], [22, pág. 42]:

<sup>39</sup>Intuitivamente, una medida de cardinalidad no es convexa si presenta “huecos”. Por ejemplo, para  $X = \{1/e_1, 0,5/e_2, 0,5/e_3\}$  la cardinalidad  $Z$  de  $X$  es  $Z(X) = \{0/0, 1/1, 0/2, 0,5/3\}$ . Nótese que  $\mu_{Z(X)}(2) = 0 < \min(\mu_Z(1), \mu_Z(3))$ .

Una cardinalidad borrosa  $C$  cumple la propiedad aditiva si para cada par de conjuntos borrosos  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  se cumple que  $\mu_{C(X_1 \cup X_2)}(j) = \sup \{ \min(\mu_{C(X_1)}(i), \mu_{C(X_2)}(k)) : i + k = j \}$

**Definición 70** Sea  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo  $GZ$  para sentencias cuantificadas unarias se define como

$$GZ_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \sup \left\{ \min \left( \mu_Q \left( |(X)_{\geq \alpha}| \right), \alpha \right) : \alpha \in [0, 1] \right\}$$

La definición de la versión relativa del modelo  $GZ$  es la siguiente [80, sección 3.4.2.], [20, pág. 196], [22, pág. 53]:

**Definición 71** Sea  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso binario proporcional,  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos. El modelo  $GZ$  para sentencias cuantificadas proporcionales se define como

$$GZ_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) = \sup \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \left| \frac{|(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}|}{|(X_1)_{\geq \alpha}|} \right| \right), \alpha \right) : \alpha \in [0, 1] \right\}$$

La versión proporcional del modelo  $GZ$  supone que el conjunto borroso  $X_1$  está normalizado. En otro caso los autores indican que se debe normalizar  $X_1$  y aplicar el mismo factor de normalización a  $X_1 \cap X_2$  (nótese que  $|(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}| = |(X_1 \cap X_2)_{\geq \alpha}|$ ). Este proceso de normalización presenta algunos problemas, tal como detallaremos en la sección 1.5.6.

Aunque la definición del modelo  $GZ$  es muy razonable, en la práctica presenta algunas deficiencias bastante importantes. En primer lugar, el modelo  $GZ$  es discontinuo, lo cual supone una importantísima limitación para su utilización práctica:

**Ejemplo 13** Consideremos los siguientes conjuntos borrosos

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3, 1/e_4\} \\ X_2 &= \{1/e_1, 0/e_2, 0/e_3, 0/e_4\} \\ X'_1 &= \{1/e_1, 1 - \lambda/e_2, 1 - \lambda/e_3, 1 - \lambda/e_4\} \end{aligned}$$

con  $\lambda > 0$ , y el número borroso “identidad” definido como:

$$\mu_Q(x) = x, x \in [0, 1]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} GZ_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) &= \sup \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{|(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}|}{|(X_1)_{\geq \alpha}|} \right), \alpha \right) : \alpha \in (0, 1] \right\} \\ &= \sup \left\{ \min \left( \frac{1}{4}, \alpha \right) : \alpha \in (0, 1] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Pero si evaluamos  $GZ(\mu_Q)(X'_1, X_2)$  para  $\lambda > 0$  tendremos

$$\begin{aligned} GZ_{prp}^{(2)}(Q)(X'_1, X_2) &= \sup \left\{ \min \left( \mu_Q \left( \frac{|(X'_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}|}{|(X'_1)_{\geq \alpha}|} \right), \alpha \right) : \alpha \in (0, 1] \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ya que para  $\alpha = 1$   $(X_1)_{\geq \alpha} = (X_2)_{\geq \alpha} = \{e_1\}$  con lo que  $\min \left( \mu_Q \left( \frac{|\{e_1\} \cap \{e_1\}|}{|\{e_1\}|} \right), 1 \right) = 1$ . Es decir, para todo  $\lambda > 0$  tendremos que  $GZ_{prp}^{(2)}(Q)(X'_1, X_2) = 1$  independientemente de lo pequeño que sea  $\lambda$ . De esta manera se demuestra la violación de la propiedad de continuidad.

Pero el modelo también viola la propiedad de continuidad para cuantificadores unarios:

**Ejemplo 14** Consideremos los siguientes conjuntos borrosos

$$\begin{aligned} X &= \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3, 1/e_4\} \\ X' &= \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3, 1 - \lambda/e_4\} \end{aligned}$$

con  $\lambda > 0$ , y el número borroso “exactamente 3” definido como

$$\mu_Q(x) = \begin{cases} 1 & : x = 3 \\ 0 & : x \neq 3 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\begin{aligned} GZ_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) &= \sup \{ \min(\mu_Q((X)_{\geq \alpha}), \alpha) : \alpha \in (0, 1] \} = 0 \\ GZ_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X') &= \sup \{ \min(\mu_Q((X')_{\geq \alpha}), \alpha) : \alpha \in (0, 1] \} = 1 \end{aligned}$$

La propiedad de continuidad no es la única propiedad importante que viola el modelo  $GZ$ . Las propiedades de negación externa, interna y dualidad tampoco se cumplen en este modelo. El siguiente ejemplo demuestra la violación de la propiedad de negación externa:

**Ejemplo 15** Consideremos el siguiente conjunto borroso:

$$X = \{1/e_1, 0,8/e_2\}$$

y el número borroso "identidad" definido como

$$\mu_Q(x) = \frac{x}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \approx GZ_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) &= \approx \sup \{ \min(\mu_Q((X)_{\geq \alpha}), \alpha) : \alpha \in (0, 1] \} \\ &= \sup \{ \min(1, 0,8), \min(0,5, 1) \} \\ &= \approx 0,8 \\ &= 0,2 \\ GZ_{abs}^{(1)}(\mu_{\approx Q})(X) &= \sup \{ \min(\mu_{\approx Q}((X)_{\geq \alpha}), \alpha) : \alpha \in (0, 1] \} \\ &= \sup \{ \min(0, 0,8), \min(0,5, 1) \} \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Y demostramos ahora el no cumplimiento de la propiedad de negación interna:

**Ejemplo 16** Consideremos los siguientes conjuntos borrosos:

$$X = \{0,8/e_1, 0,8/e_2\}, \approx X = \{0,2/e_1, 0,2/e_2\}$$

y el número borroso identidad definido en el ejemplo anterior. Entonces,

$$\begin{aligned} GZ_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(\approx X) &= \sup \{ \min(\mu_Q((\approx X)_{\geq \alpha}), \alpha) : \alpha \in (0, 1] \} \\ &= \sup \{ \min(0, 1), \min(1, 0,2) \} \\ &= 0,2 \\ GZ_{abs}^{(1)}(\mu_Q \approx)(X) &= \sup \{ \min(\mu_Q \approx((X)_{\geq \alpha}), \alpha) : \alpha \in (0, 1] \} \\ &= \sup \{ \min(1, 1), \min(0, 0,8) \} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Los contraejemplos anteriores demuestran que el modelo  $GZ$  tiene un comportamiento débil que desaconseja su utilización.

### 1.5.5. Cuantificación basada en la medida *FE-Count* y generalización de Delgado et al.

En este apartado vamos a analizar la aproximación a la cuantificación borrosa unaria [78, pág. 365] basada en la medida de cardinalidad *FE-Count* [103] y la generalización de la misma planteada por Delgado et al. en [19, 22, 80]. La aproximación basada en la medida *FE-Count* se analiza en profundidad en [47, sección A.6.]. Por su parte, la generalización de esta aproximación planteada en [19, 22, 80] sólo parece válida para un único caso particular. Esta aproximación ha sido analizada en [4].

Empezaremos mostrando las críticas al modelo basado en *FE-Count* planteadas en [47, sección A.6.]. Posteriormente analizaremos la generalización planteada por Delgado et al.

A continuación introducimos la medida de cardinalidad borrosa *FE-Count* [103, pág. 157]:

**Definición 72 (*FE-Count*)** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La medida de cardinalidad borrosa *FE-Count* se define como

$$\mu_{FE-Count}(j) = \mu_{[j]}(X) \wedge \tilde{\mu}_{[j+1]}(X)$$

La cardinalidad *FE-Count* se puede definir a partir de la cardinalidad *FG-Count* de la siguiente manera:

$$\mu_{FE-Count}(j) = \mu_{FG-Count}(j) \wedge \tilde{\mu}_{FG-Count}(j+1)$$

Nótese que  $\mu_{FG-Count}(j)$  representa el grado en el que  $X$  tiene al menos  $j$  elementos mientras que  $\tilde{\mu}_{FG-Count}(j+1)$  representa el grado en el que  $X$  no tiene más de  $j$  elementos. De esta manera,  $\mu_{FE-Count}(j)$  se interpreta como el grado en el que  $X$  contiene exactamente  $j$  elementos.

En la bibliografía se pueden encontrar otras interpretaciones que llevan a la definición de la cardinalidad *FE-Count* [78, 91, 92].

La medida de cardinalidad *FE-Count* ha sido criticada en [36], pero su comportamiento teórico es muy sólido, tal como se demuestra en [91, 92].

A partir de la medida de cardinalidad *FE-Count* Ralescu [78, pág. 365] realiza la siguiente propuesta para la evaluación de sentencias cuantificadas unarias:

**Definición 73** Sea  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo  $FE$  para sentencias cuantificadas unarias se define como

$$FE_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \max_{j=0}^m \{\mu_Q(j) \wedge \mu_{FE-Count}(j)\} \quad (1.19)$$

El principal problema de la aproximación planteada en la expresión 1.19 es la violación de la propiedad de monotonía en los argumentos. Este hecho, expuesto en [47, pág. 410] limita en gran medida la utilidad de la aproximación. El siguiente ejemplo, tomado de [47, pág. 410] demuestra la violación de esta propiedad:

**Ejemplo 17** Consideremos los siguientes conjuntos borrosos

$$\begin{aligned} X &= \{1/e_1, 0/e_2\} \\ X' &= \{1/e_1, 0,5/e_2\} \end{aligned}$$

Nótese que  $X \subseteq X'$ . La medida de cardinalidad  $FE-Count$  para los conjuntos anteriores es

$$\begin{aligned} FE-Count(X) &= \{0/0, 1/1, 0/2\} \\ FE-Count(X') &= \{0/0, 0,5/1, 0,5/2\} \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists,E})(X) &= 1 \\ FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists,E})(X') &= 0,5 \end{aligned}$$

De esta manera se viola la propiedad de monotonía ya que  $\exists : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  es monótono no decreciente pero  $FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists,E})(X) > FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists,E})(X')$ . Nótese además que  $FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists,E})(X') = 0,5$  aunque claramente el conjunto  $X'$  tiene al menos 1 elemento.

Además, en [47, pág. 410] también se indica que la aproximación basada en la medida  $FE-Count$  no preserva las propiedades de negación externa y dualidad. El siguiente contraejemplo demuestra la violación de la propiedad de negación externa:

**Ejemplo 18** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  el conjunto borroso definido como

$$X = \{1/e_1, 0,7/e_2, 0,4/e_3\}$$

Y consideremos las siguientes funciones de soporte

$$\mu_Q(x) = \begin{cases} 0 & : x < 2 \\ 1 & : x \geq 2 \end{cases}$$

$$\mu_{\simeq Q}(x) = \begin{cases} 1 & : x < 2 \\ 0 & : x \geq 2 \end{cases}$$

Entonces

$$FE\text{-Count}(X) = \{0/0, 0,3/1, 0,6/2, 0,4/3\}$$

$$FE_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = 0,6$$

$$\simeq FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\simeq Q})(X) = \simeq 0,3 = 0,7$$

Y la violación de la propiedad de dualidad se demuestra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 19** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  el conjunto borroso definido como

$$X = \{0/e_1, 0,5/e_2\}$$

Entonces

$$\simeq X = \{1/e_1, 0,5/e_2\}$$

$$FE\text{-Count}(X) = \{0,5/0, 0,5/1, 0/2\}$$

$$FE\text{-Count}(\simeq X) = \{0/0, 0,5/1, 0,5/2\}$$

Con lo que

$$FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\forall, E})(X) = 0$$

$$\simeq FE_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists, E})(\simeq X) = 0,5$$

De esta manera se confirma que el modelo de Ralescu no es adecuado para la evaluación de expresiones cuantificadas borrosas.

En [19, 22, 80] se realiza una generalización de la medida  $FE\text{-Count}$  que se utiliza para definir la familia general de modelos  $G$  (que se definirá en breve). Pese a que la generalización planteada es razonable, los autores sólo analizan en profundidad un único representante de dicha familia. Aunque dicho modelo, que vamos a analizar en la sección 1.5.6, tiene un comportamiento adecuado, en general los modelos pertenecientes a la familia  $G$  presentan un comportamiento débil.

A continuación realizamos las definiciones que nos permiten definir la familia  $G$  de métodos.

En [80, pág. 35], [19, pág. 16] y [22, pág. 34] se define la siguiente generalización de la medida de cardinalidad *FG-Count*:

**Definición 74** ( $L$ ) *Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La medida de cardinalidad  $L$  se define como*

$$\mu_{L(X)}(j) = \begin{cases} 1 & : j = 0 \\ 0 & : j > m \\ \bigvee_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbf{I}_k} \mu_{X_1}(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge \mu_{X_1}(e_{i_k}) & : 1 \leq k \leq m \end{cases} \quad (1.20)$$

donde  $\vee, \wedge$  son respectivamente una *tnorma* y una *tconorma* cualquiera, e  $\mathbf{I}_k$  es el conjunto de  $k$ -tuplas definido como

$$\mathbf{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) : i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$$

con  $1 \leq i_j \leq m$ .

Nótese que cuando escogemos la *tnorma* mín y la *tconorma* máx en la expresión 1.20 la medida de cardinalidad  $L$  coincide con la medida *FG-Count*.

A partir de  $L$  en [80, pág. 36], [19, pág. 16] y [22, pág. 34] se plantea la siguiente medida de cardinalidad:

**Definición 75** ( $E$ ) *Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La medida de cardinalidad  $E$  se define como*

$$\mu_{E(X)}(j) = \mu_{L(X)}(j) \wedge \tilde{\mu}_{L(X)}(j+1) \quad (1.21)$$

En la expresión 1.21, si escogemos la medida de cardinalidad  $L = \text{FG-Count}$ , la función de negación estándar, y la *tnorma* mínimo entonces la medida de cardinalidad  $E$  coincide con la medida *FECCount*.

A partir de la expresión 1.21 los autores plantean la siguiente familia de métodos para evaluar sentencias cuantificadas unarias [80, pág. 85], [19, pág. 16], [22, pág. 39]:

**Definición 76** Sea  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. La familia de modelos  $G$  para sentencias cuantificadas unarias se define como

$$G_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \bigvee_{i=0, \dots, m} \mu_{E(X)}(i) \wedge \mu_Q(i) \quad (1.22)$$

donde  $\vee$  es una tconorma cualquiera y  $\wedge$  es una tnorma cualquiera.

Cuando se escoge en 1.21 la negación estándar, la tnorma de Lukasiewicz ( $\wedge(x_1, x_2) = \max(0, x_1 + x_2 - 1)$ ), la medida de cardinalidad  $L = FGCount$ , y en 1.22 la tconorma de Lukasiewicz ( $\vee(x_1, x_2) = \min(1, x_1 + x_2)$ ) y la tnorma producto el modelo resultante es el analizado en la sección 1.5.6.

En [4, pág. 97] se presenta un contraejemplo que demuestra que salvo para casos muy especiales la familia  $G$  viola la propiedad de monotonía:

**Ejemplo 20** Consideremos los siguientes conjuntos borrosos:

$$\begin{aligned} X &= \{1/e_1, 0/e_2\} \\ X' &= \{1/e_1, a/e_2\} \end{aligned}$$

donde  $a \in (0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} E(X) &= \{0/0, 1/1, 0/2\} \\ E(X') &= \{0/0, 1 - a/1, a/2\} \end{aligned}$$

donde solamente se ha supuesto la utilización de la negación estándar en la definición de  $E$  (nótese que para toda tnorma se cumple que  $t(1, x) = x$ ). De esta manera

$$\begin{aligned} G_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists})(X) &= 1 \\ G_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists})(X') &= \bigvee_{i=0, \dots, m} \mu_{E(X)}(i) \wedge \mu_Q(i) \\ &= 0 \vee (1 - a) \vee a \end{aligned}$$

Pero la propiedad de monotonía en los argumentos exige  $G_{abs}^{(1)}(\mu_{\exists, E})(X') = 1$  (ya que  $X \subseteq X'$ ). Por lo tanto, para que se cumpla la propiedad de monotonía, ha de

ser  $(1 - a) \vee a = 1$  para todo  $a \in (0, 1)$ . Esta es una propiedad muy específica, que hasta nuestro conocimiento sólo cumple la tconorma de Lukasiewicz.<sup>40</sup>

Del ejemplo anterior se concluye que la aproximación a la cuantificación borrosa planteada en [19, 22, 80] mediante la generalización de la medida *FE-Count* sólo puede ser válida en casos muy particulares ya que en general se pierde la propiedad de monotonía si la tconorma utilizada en 1.22 no cumple que  $(1 - a) \vee a = 1$ .

### 1.5.6. Modelo GD de Delgado et. al.

En este apartado analizaremos el modelo *GD* planteado por Delgado et al. en [21, pág 281], [80, sección 3.3.2. y sección 3.4.1.], [22, pág. 37]. El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ , que plantearemos en la sección 3.2.1 como una instancia particular de un marco probabilístico para la definición de modelos de cuantificación borrosa, es una adaptación del modelo *GD* en la que se extiende el mismo a cuantificadores semi-borrosos. El comportamiento del modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  se analiza en profundidad en la sección 3.3.2, por lo que recomendamos al lector interesado la consulta de dicho apartado. No obstante, existe una diferencia de cierta importancia entre el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  y el modelo *GD*. Mientras que en el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  se maneja la indefinición de la cardinalidad relativa en la definición de los cuantificadores semi-borrosos, el modelo *GD* maneja esta situación mediante una normalización de los conjuntos borrosos argumento [80, sección 2.4.1, pág 42], [21, pág. 281], [22, pág. 37] que desde nuestro punto de vista no es adecuada. Por esta razón, en este apartado, vamos a realizar una pequeña crítica acerca de la misma.

La versión unaria del modelo *GD* se basa en la siguiente medida de cardinalidad relativa probabilística [80, pág. 37], [22, pág. 35]:

<sup>40</sup>Si se utiliza en 1.22 la tnorma producto y la tconorma de Lukasiewicz entonces las posibles definiciones aceptables de la cardinalidad borrosa se limitan en gran medida. Considérese una función de soporte constante  $\mu_Q(x) = c \in (0, 1)$ . Es esperable que  $G_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = c$ . Pero

$$G_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \bigvee_{i=0, \dots, m} \mu_{E(X)}(i) \wedge \mu_Q(i) = \sum_{i=0}^m \mu_{E(X)}(i) c$$

y esto sólo se cumple si  $\sum_{i=0}^m \mu_E(i) = 1$ . Es decir, la medida de cardinalidad define una probabilidad sobre  $\mathbb{N}$ .

No hemos intentado profundizar más en este hecho, pero a falta de un análisis más profundo, parece que el conjunto de modelos aceptables de la familia *G* esta limitado al modelo *GD* que analizamos en la sección 1.5.6.

**Definición 77** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El cardinal probabilístico  $ED(X)$  se define como

$$\begin{aligned} \mu_{ED(X)}(j) &= \int_0^1 [|X_{\geq \alpha}| = j] d\alpha \\ &= \mu_{[j]}(X) - \mu_{[j+1]}(X) \end{aligned} \quad (1.23)$$

En [80, pág 39, proposición 2.7.] se establece que la medida de cardinalidad  $ED$  pertenece a la familia definida en la expresión 1.21 cuando se utiliza la tnorma máximo y la tnorma mínimo en la definición de  $L$ , la negación estándar y la tnorma de Lukasiewicz ( $\wedge(x_1, x_2) = \max(0, x_1 + x_2 - 1)$ ). Es evidente que este cardinal define una probabilidad sobre  $\mathbb{N}$ .

La definición del modelo  $GD$  para cuantificadores binarios proporcionales se basa en la siguiente medida de cardinalidad relativa [21, pág 280], [80, sección 3.3.2.], [22, pág. 37]:

**Definición 78** Sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos. El cardinal relativo probabilístico  $ED(X_1, X_2)$  se define como

$$\mu_{ED(X_1, X_2)}(q) = \int_0^1 \left[ \left| \frac{(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}}{(X_1)_{\geq \alpha}} \right| = q \right] d\alpha, q \in [0, 1] \quad (1.24)$$

A partir de la cardinalidad 1.23 se plantea la versión absoluta del modelo  $GD$  de la siguiente manera [80, sección 3.3.1.], [21, pág. 281], [22, pág. 40]:

**Definición 79** Sea  $\mu_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-borroso unario absoluto,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. El modelo  $GD$  para sentencias cuantificadas unarias se define como

$$\begin{aligned} GD_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) &= \sum_{j=0}^m \mu_Q(j) ED(X, j) \\ &= \int_0^1 \mu_Q(|X_{\geq \alpha}|) d\alpha \end{aligned}$$

La versión proporcional [80, sección 3.4.2.], [20, pág. 196], [22, pág. 49] es la siguiente:

**Definición 80** Sea  $\mu_Q : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  la función de soporte de un cuantificador semi-boroso binario proporcional,  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos. El modelo  $GD$  para sentencias cuantificadas proporcionales se define como

$$\begin{aligned} GD_{prop}^{(2)}(\mu_Q)(X_1, X_2) &= \sum_{q \in [0,1] \mid \Pr(q) > 0} \mu_Q(q) \mu_{ED(X_1, X_2)}(q) \\ &= \int_0^1 \mu_Q \left( \left| \frac{(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}}{(X_1)_{\geq \alpha}} \right| \right) d\alpha \end{aligned}$$

Nótese que si  $X_1$  es el conjunto vacío el modelo  $GD$  está indefinido. Además, si  $X_1$  no es un conjunto borroso normalizado entonces el representante vacío de  $X_1$  tendrá asignada una probabilidad mayor que 0, por lo que la expresión  $\left| \frac{(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}}{(X_1)_{\geq \alpha}} \right|$  estará indefinida para  $\alpha > \max\{\mu_{X_1}(e) : e \in E\}$ . Para solucionar este problema en [80, sección 2.4.1., pág 42], [21, pág. 281], [22, pág. 37] se plantea normalizar el conjunto  $X_1$  aplicando el factor de normalización  $\frac{1}{\max\{\mu_{X_1}(e) : e \in E\}}$ , y aplicar el mismo factor de normalización al conjunto  $X_1 \tilde{\cap} X_2$  para evitar que las cardinalidades relativas se vean afectadas<sup>41</sup>.

Desde nuestro punto de vista este procedimiento es problemático. En primer lugar, ante variaciones infinitesimales en los conjuntos argumento se pueden obtener resultados contradictorios. Considérese el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 21** Consideremos los conjuntos borrosos  $X_1, X_2, X'_2$

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\lambda/e_1, \lambda/e_2\} \\ X_2 &= \{\lambda/e_1, \lambda/e_2\} \\ X'_2 &= \{0/e_1, 0/e_2\} \end{aligned}$$

y la función de soporte “identidad” definida como

$$\mu_{\text{identidad}}(x) = \frac{x}{2}$$

Normalizando los conjuntos anteriores tenemos

$$\begin{aligned} X_1^{norm} &= \{1e_1, 1/e_2\} \\ (X_1 \tilde{\cap} X_2)^{norm} &= \{1e_1, 1/e_2\} \\ (X_1 \tilde{\cap} X'_2)^{norm} &= \{0e_1, 0/e_2\} \end{aligned}$$

<sup>41</sup>La normalización no es consistente con la definición del modelo en el caso unario, en la que no se plantea ningún tipo de normalización cuando el conjunto borroso argumento no está normalizado.

donde con el superíndice norm indicamos que los conjuntos están normalizados, con lo que

$$\begin{aligned} GD_{prop}^{(2)}(\mu_{\text{identidad}})(X_1, X_2) &= 1 \\ GD_{prop}^{(2)}(\mu_{\text{identidad}})(X_1, X'_2) &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $\lambda > 0$ . Como  $\lambda$  se puede hacer arbitrariamente pequeño resulta que una variación infinitesimal en  $X_2$  produce resultados completamente distintos.

En segundo lugar la normalización no evita la indefinición para  $X_1 = \emptyset$ . Este hecho es muy problemático, ya que la asignación de un valor arbitrario a  $GD(\mu_Q)(\emptyset, X_2)$  no es un procedimiento válido para solucionar el problema. Por ejemplo, si en relación con el ejemplo anterior definimos

$$GD(\mu_{\text{identidad}})(\emptyset, X_2) = 1$$

entonces el modelo se vuelve discontinuo ya que

$$\begin{aligned} GD(\mu_{\text{identidad}})(\emptyset, \emptyset) &= 1 \\ GD(\mu_{\text{identidad}})(\{\lambda/e_1, \lambda/e_2\}, \emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Además, es posible realizar otra crítica al procedimiento de normalización. El modelo GD interpreta los conjuntos borrosos como probabilidades (véase la sección 3.2.1) por lo que es razonable medir la entropía de la distribución de probabilidad asociada a un conjunto borroso. Pero la normalización cambia la entropía de la distribución de probabilidad, y como consecuencia, la información representada por los conjuntos borrosos. Veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 22** Consideremos los conjuntos borrosos  $X_1, X_2$

$$\begin{aligned} X_1 &= \{0,5/e_1, 0,5/e_2\} \\ X_2 &= \{0/e_1, 0/e_2\} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_1^{norm} &= \{1/e_1, 1/e_2\} \\ (X_1 \tilde{\cap} X_2)^{norm} &= \{0/e_1, 0/e_2\} \end{aligned}$$

Si consideramos la distribución de probabilidad sobre los alfa cortes asociada a los conjuntos  $X_1$  y  $X_2$  tenemos

$$Pr^1 (X_1 = \emptyset \wedge (X_1 \tilde{\cap} X_2) = \emptyset) = 0,5$$

$$Pr^1 (X_1 = E \wedge (X_1 \tilde{\cap} X_2) = \emptyset) = 0,5$$

Pero cuando normalizamos los conjuntos la distribución de probabilidad sobre los alfa cortes se convierte en la siguiente:

$$Pr^2 (X_1^{norm} = E \wedge (X_1 \tilde{\cap} X_2)^{norm} = \emptyset) = 1$$

Y la cantidad de información asignada a las distribuciones anteriores es claramente distinta. Nótese que la entropía asociada a las distribuciones anteriores es

$$Ent (Pr^1) = -0,5 \log_2 (0,5) - 0,5 \log_2 (0,5) = 1$$

$$Ent (Pr^2) = -1 \log_2 (1) = 0$$

Por las razones expuestas consideramos que la normalización de los conjuntos borrosos que se realiza en la definición del modelo  $GD$  no resuelve el problema de la indeterminación de la cardinalidad relativa, y que la asignación de un valor arbitrario a esta situación, tal como se hace en las definiciones de cuantificadores semi-borrosos proporcionales de esta memoria, es más adecuada.

### 1.5.7. Propuestas de Glöckner basadas en cortes trivaluados

En este apartado se analizan las tres aproximaciones principales planteadas por Glöckner [44, 45, 47]. Todos los modelos definidos por Glöckner son DFSs estándar, por lo que su comportamiento teórico es excelente. Pese a ello, estos modelos pueden ser desaconsejables para muchas aplicaciones. La razón de este hecho aparentemente contradictorio es que estos modelos son constantes en ciertos rangos incluso para cuantificadores semi-borrosos para los que intuitivamente es esperable un comportamiento estrictamente monótono.

Analizamos ya las tres propuestas principales de Glöckner: los modelos  $\mathcal{M}$  [47, pág. 197],  $\mathcal{M}_{CX}$  [47, pág. 206] y  $\mathcal{F}_{Ch}$  [47, pág. 230]. Estos modelos, de comportamiento especial dentro de la clase de DFSs estándar, son los únicos para los cuales el autor ha propuesto soluciones algorítmicas [47, capítulo 11], [44].

Las siguientes definiciones son necesarias para la definición de los DFSs  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_{CX}$  y  $\mathcal{F}_{Ch}$ .

**Definición 81 (Cortes de nivel de prudencia)** Sea  $E$  el conjunto referencial,  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso y  $\gamma \in \mathbf{I}$ .  $X_\gamma^{\min}, X_\gamma^{\max} \in \mathcal{P}(E)$  se definen como:

$$X_\gamma^{\min} = \begin{cases} X_{>\frac{1}{2}} & : \gamma = 0 \\ X_{\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma} & : \gamma > 0 \end{cases}$$

$$X_\gamma^{\max} = \begin{cases} X_{\geq\frac{1}{2}} & : \gamma = 0 \\ X_{>\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma} & : \gamma > 0 \end{cases}$$

Nótese que  $X_{\geq\alpha} = \{e \in E : \mu_X(e) \geq \alpha\}$  denota el alfa-corte de nivel  $\alpha$  de  $X$  y  $X_{>\alpha} = \{e \in E : \mu_X(e) > \alpha\}$  denota el alfa-corte estricto.

$X_\gamma^{\min}$  denota los elementos que con seguridad pertenecen al conjunto borroso  $X$  para el nivel de prudencia  $\gamma$  mientras que  $X_\gamma^{\max}$  incluye también los elementos cuya pertenencia al corte de nivel de prudencia  $\gamma$  está indeterminada. Los elementos que no están en  $X_\gamma^{\max}$  no pertenecen al corte de nivel de prudencia. Se puede interpretar el corte de nivel de prudencia como un “conjunto trivaluado” al cual los elementos de  $X_\gamma^{\min}$  pertenecen con seguridad (función de pertenencia 1) mientras que para los elementos de  $X_\gamma^{\max}/X_\gamma^{\min}$  la función de pertenencia está indeterminada (función de pertenencia  $\frac{1}{2}$ ). Para los elementos que no están en  $X_\gamma^{\max}$  la función de pertenencia es 0.

Los modelos basados en cortes trivaluados que se analizan en esta sección utilizan en su definición el operador mediana borrosa:

**Definición 82** La mediana borrosa  $med_{\frac{1}{2}} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$  se define como

$$med_{\frac{1}{2}}(u_1, u_2) = \begin{cases} \min(u_1, u_2) & : \min(u_1, u_2) > \frac{1}{2} \\ \max(u_1, u_2) & : \max(u_1, u_2) < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que

$$med_{\frac{1}{2}}(1, u) = \begin{cases} u & : u > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & : \text{en otro caso} \end{cases}, med_{\frac{1}{2}}(0, u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : u > \frac{1}{2} \\ u & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

También se cumple que

$$med_{\frac{1}{2}}(u_1, u_2) = \tilde{\sim}med_{\frac{1}{2}}(\tilde{\sim}u_1, \tilde{\sim}u_2)$$

Además, el operador mediana borrosa es conmutativo, asociativo y monótono.

La siguiente definición extiende la mediana borrosa a conjuntos:

**Definición 83** *El operador  $m_{\frac{1}{2}} : \mathcal{P}(\mathbf{I}) \rightarrow \mathbf{I}$  se define como*

$$m_{\frac{1}{2}}X = med_{\frac{1}{2}}(\inf X, \sup X)$$

para todo  $X \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ .

La siguiente definición, planteada en [44, pág. 100], define un conjunto que contiene las posibles imágenes de un cuantificador sobre los conjuntos pertenecientes al rango definido por un corte trivaluado<sup>42</sup>:

**Definición 84** ( $S_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)(X_1, \dots, X_n)$ ) *Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos y  $\gamma \in [0, 1]$  un nivel de prudencia.  $S_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  se define como:*

$$S_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)(X_1, \dots, X_n) = \left\{ Q(Y_1, \dots, Y_n) : (X_i)_\gamma^{\min} \subseteq Y_i \subseteq (X_i)_\gamma^{\max} \right\}$$

Para representar el supremo y el ínfimo de  $S_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)$  utilizamos la siguiente notación:

**Definición 85** ( $\top_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)$ ) *Sea  $Q : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos y  $\gamma \in [0, 1]$  un nivel de prudencia.  $\top_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  se define como:*

$$\top_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) = \sup S_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)$$

**Definición 86** ( $\perp_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)$ ) *Sea  $Q : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos y  $\gamma \in [0, 1]$  un nivel de prudencia.  $\perp_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  se define como:*

$$\perp_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) = \sup S_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)$$

A partir de las definiciones anteriores planteamos los tres casos paradigmáticos de DFSs estándar:

---

<sup>42</sup>Esta notación nos permite definir los modelos que se van a analizar de una manera más sencilla que la realizada en [47].

**Definición 87** ( $\mathcal{M}$ ) [47, pág. 197] El DFS estándar  $\mathcal{M} : (Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}) \rightarrow (\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I})$  se define como

$$\mathcal{M}(Q)(X_1, \dots, X_n) = \int_0^1 \text{med}_{\frac{1}{2}}(\top_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma), \perp_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma)) d\gamma$$

Hasta nuestro conocimiento, la primera propuesta del DFS  $\mathcal{M}$  es la realizada en [41, pág. 62]. El modelo  $\mathcal{M}$  pertenece al grupo de DFSs estándar que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad. Además, es un modelo práctico según el autor, ya que verifica las propiedades de continuidad.

**Definición 88** ( $\mathcal{M}_{CX}$ ) [47, pág. 206] El DFS estándar  $\mathcal{M}_{CX} : (Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}) \rightarrow (\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I})$  se define como

$$\mathcal{M}_{CX}(Q)(X_1, \dots, X_n) = \sup \{Q_{V,W}^L(X_1, \dots, X_n) : V_1 \subseteq W_1, \dots, V_n \subseteq W_n\}$$

donde

$$Q_{V,W}^L(X_1, \dots, X_n) = \min(\Xi_{V,W}(X_1, \dots, X_n), \inf \{Q(Y_1, \dots, Y_n) : V_i \subseteq Y_i \subseteq W_i\})$$

$$\Xi_{V,W}(X_1, \dots, X_n) = \min_{i=1}^n \min(\inf \{\mu_{X_i}(e) : e \in V_i\}, \inf \{1 - \mu_{X_i}(e) : e \notin W_i\})$$

Según el autor, el comportamiento del DFS  $\mathcal{M}_{CX}$  es excelente ya que cumple propiedades que no son verificadas por ningún otro DFS estándar. El modelo  $\mathcal{M}_{CX}$  pertenece al grupo de DFSs que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad y generaliza el modelo basado en la cardinalidad FG-Count para cuantificadores unarios no decrecientes (véase la sección 1.5.3).

**Definición 89** ( $\mathcal{F}_{Ch}$ ) [47, pág. 230] El DFS estándar  $\mathcal{F}_{Ch} : (Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}) \rightarrow (\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I})$  se define como

$$\mathcal{F}_{Ch}(Q)(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{2} \int_0^1 \top_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) d\gamma + \frac{1}{2} \int_0^1 \perp_{Q, X_1, \dots, X_n}(\gamma) d\gamma$$

El modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  es el ejemplo paradigmático de DFS estándar que no cumple la propiedad de propagación de la borrosidad. Este DFS generaliza el modelo de Yager basada en OWA para cuantificadores unarios no decrecientes (véase la sección 1.5.2).

Como ya hemos dicho, los modelos que se acaban de plantear tienen todos un comportamiento teórico excelente. Pero pese al análisis profundo que se realiza en

[45, 47] de estos modelos los mismos no están exentos de críticas. A continuación se plantea un ejemplo que demuestra que los DFSs que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad (en particular los modelos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_{CX}$ ) son incapaces de discernir entre situaciones claramente diferenciadas:

**Ejemplo 23** Consideremos el cuantificador semi-borroso: **identidad** :  $\mathcal{P}(\{e_1, \dots, e_4\}) \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

$$\mathbf{identidad}(Y) = \frac{|Y|}{|E|}, Y \in \mathcal{P}(E)$$

Nótese que

$$\mathbf{identidad}(\{e_1, e_2\}) = \frac{|\{e_1, e_2\}|}{4} = 0,5$$

y como consecuencia, todo QFM que cumpla la propiedad de generalización correcta verificará que

$$\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) = 0,5$$

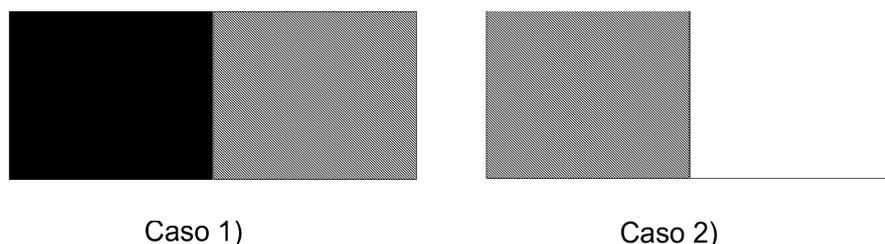
Supongamos ahora que  $\mathcal{F}$  cumple la propiedad de propagación de la borrosidad en los argumentos. Entonces para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  tal que  $X \preceq_c Y$  será  $\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(X) \preceq_c \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(Y)$ ; es decir, para todo  $X$  tal que  $\mu_X(e_1), \mu_X(e_2) \in [0,5, 1]$ ,  $\mu_X(e_3), \mu_X(e_4) \in [0, 0,5]$  se tendrá que

$$\mathcal{F}(\mathbf{identidad})(X) = 0,5$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{identidad})(\{0,9/e_1, 0,8/e_2, 0,1/e_3, 0,2/e_4\}) \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Más claramente, los modelos que propagan la borrosidad son incapaces de distinguir las situaciones que se presentan en la figura 1.8 para el cuantificador **identidad**. Por otra parte, el cuantificador semi-borroso **identidad** es un caso claro de un cuantificador semi-borroso estrictamente creciente, pero los modelos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_{CX}$  sólo son monótono no-decrecientes.



**Figura 1.8:** Ejemplo de situaciones indistinguibles para los modelos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_{CX}$  y el cuantificador semi-borroso **identidad** :  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ .

Como consecuencia, podemos decir que los DFSs que propagan la borrosidad pueden ser útiles en ciertas aplicaciones en las cuales la coherencia de los modelos con las intuiciones lingüísticas es importante, pero los ejemplos anteriores demuestran que no son útiles para aplicaciones en las que sea necesario realizar una ordenación fina de los datos de entrada. Es cierto que los DFSs estándar son coherentes con los operadores borrosos máx, mín, por lo que el comportamiento anterior puede ser, hasta cierto punto, una consecuencia de los operadores lógicos inducidos. Pero es muy fácil imaginar aplicaciones en las que los resultados anteriores no son aceptables, dada la incapacidad de los modelos para distinguir entre las situaciones presentadas.

En [47, apéndice A.] Glöckner utiliza frecuentemente un ejemplo en el que se muestran imágenes de nubosidad de una región de Alemania (en escala de grises) para criticar las consecuencias de la violación de ciertas propiedades por parte de las aproximaciones a la cuantificación borrosa anteriores a su trabajo. Pero estos ejemplos son muy parecidos al que planteamos en la figura 1.8. Si interpretamos que las imágenes de la figura 1.8 representan la nubosidad de una determinada región, entonces parece claro que la primera imagen (figura 1.8, caso 1) es un ejemplo de nubosidad baja<sup>43</sup> mientras que la segunda (figura 1.8, caso 2) es un ejemplo de nubosidad alta. Pero los modelos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_{CX}$  no son capaces de distinguir ambas situaciones, resultando una clasificación de nubosidad media para ambas imágenes.

En particular, la aplicación de cuantificación borrosa en recuperación de información que se plantea en esta memoria (véase el capítulo 5) es un ejemplo claro de un problema práctico en el cual la situación descrita por el ejemplo anterior no es aceptable. A la hora de calcular un ranking de documentos, no podemos aceptar que

<sup>43</sup>Supóngase que el color blanco representa la nubosidad; esto es, cuanto más clara es la imagen más nubosidad existe en la misma.

un documento al que pertenecen la mitad de los términos de la consulta en grado completo, y la otra mitad en grado medio obtenga la misma posición en el ranking que otro documento al cual sólo pertenecen la mitad de los términos de la consulta en grado medio.

Glöckner reconoce que los DFSs que propagan la borrosidad no son adecuados para algunos problemas [47, sección 8.1.] y menciona explícitamente que en ocasiones puede ser necesario sacrificar la propiedad de propagación de la borrosidad. En el capítulo 8 de su tesis Glöckner analiza la clase de modelos que no cumplen las propiedades de propagación de la borrosidad en alguna de sus dos variantes e identifica un modelo particular, el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  definido previamente, como ejemplo paradigmático de modelo útil capaz de superar las limitaciones anteriores. Pero como veremos, el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  no soluciona adecuadamente este problema. Aunque el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  es adecuado para la construcción de rankings en el caso unario, en el caso binario presenta problemas similares a los de los modelos que propagan la borrosidad:

**Ejemplo 24** *Consideremos ahora la versión binaria del cuantificador semi-borroso identidad<sup>2</sup> :  $\mathcal{P}(\{e_1, \dots, e_4\})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definido como*

$$\text{identidad}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 1 & : Y_1 = \emptyset \\ \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} & : Y_1 \neq \emptyset \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}, \{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}) \\ &= 0,5 \\ &= \mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}, \{0,5/e_1, 0,5/e_2, 1/e_3, 1/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}, \{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0,7/e_3, 0,7/e_4\}) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}, \{1/e_1, 1/e_2, 0/e_3, 0/e_4\}) \\ &= 0,75 \\ &= \mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}, \{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}) \\ &= \mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})(\{1/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4\}, \{1/e_1, 1/e_2, 0,3/e_3, 0,3/e_4\}) \end{aligned}$$

Con lo que el cuantificador borroso  $\mathcal{F}_{Ch}(\text{identidad})$  es constante para ciertos rangos.

El cuantificador semi-borroso **identidad**<sup>2</sup> :  $\mathcal{P}(\{e_1, \dots, e_4\})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es estrictamente creciente en su segundo argumento para  $\emptyset \subseteq Y_2 \subseteq Y_1$ . No hemos estudiado como extender la definición de la propiedad de monotonía para asegurar la monotonía estricta en ciertos rangos, pero parece evidente que para ciertas aplicaciones es necesario poder distinguir entre las situaciones que se acaban de presentar.

Aconsejamos al lector la consulta del capítulo 5 para contrastar las diferencias de rendimiento entre el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  y los modelos probabilísticos que vamos a desarrollar en esta memoria en el dominio de recuperación de información. Es importante que el problema que se plantea en dicha sección es una de las tareas en las que más se ha estudiado la aplicación de la cuantificación borrosa ([9, 10, 34, 35, 67] y [47, capítulo 11], [48, 49]). Pese a que el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  es el ejemplo paradigmático de DFSs estándar que no cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad, para cuantificadores binarios el rendimiento de este modelo ha sido muy inferior al de los modelos basados en una interpretación probabilística de los conjuntos borrosos. La diferencia de rendimiento es tan importante que prácticamente descarta este modelo para la aplicación mencionada.

### 1.5.8. Otras aproximaciones a la cuantificación borrosa.

Esta sección se dedica a analizar otras propuestas del ámbito de la cuantificación borrosa y a matizar algunas modificaciones y generalizaciones de los modelos que hemos analizado en los apartados anteriores. El comportamiento de los modelos que se presentan en esta sección no es muy adecuado, por lo que sólo vamos a detallar algunos de sus problemas más graves.

En [89] los autores proponen evaluar cuantificadores definidos a partir de funciones de soporte proporcionales realizando una interpolación entre el cuantificador universal y el existencial. Este modelo se analiza en [80, pág. 79], [4, pág. 96].

La expresión que se propone en este trabajo es la siguiente:

$$V_{prp}^{(2)}(\mu_Q)(X) = \alpha(\mu_{X_1}(e_i) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) + (1 - \alpha)((\neg\mu_{X_1}(e_i)) \vee \mu_{X_2}(e_i))$$

donde  $\alpha$  es el grado de disyunción del cuantificador.

El comportamiento teórico de este modelo no es muy sólido. Se comprueba fácilmente que el modelo anterior no verifica las propiedades de generalización correcta y monotonía en los cuantificadores, por lo que no entraremos a analizar esta propuesta

en más profundidad.

En [19, pág. 17] Delgado et. al. proponen el cálculo de una medida de cardinalidad que intenta interpretar la cardinalidad relativa de los conjuntos argumento a partir de una expresión muy similar a las expresiones 1.15 y 1.16 del método de Yager basado en OWA:

$$\mu_{Z^\alpha}(e_i) = \alpha(\mu_{X_1}(e_i) \wedge \mu_{X_2}(e_i)) + (1 - \alpha)(\tilde{\mu}_{X_1}(e_i) \vee \mu_{X_2}(e_i))$$

donde  $\alpha$  es el grado de disyunción del cuantificador. Sobre este nuevo conjunto es posible definir la medida de cardinalidad  $L(Z, k)$  (tal como se explica en la sección 1.5.5) y, utilizando ésta la medida  $E(Z, k)$  (sección 1.5.5). Una vez construida la cardinalidad  $E(Z, k)$  podemos aplicarle las técnicas de evaluación de cuantificadores unarios.

Aunque los autores dejan abierta la elección de las tnormas y tconormas, profundizan en la elección particular que se utiliza en la definición del método *GD* (sección 1.5.6). Los propios autores mencionan en [22, pág. 49] el mal comportamiento del modelo. Para la elección particular de operadores que se utiliza en el modelo *GD* el modelo generaliza la propuesta basada en OWA a cuantificadores no coherentes (véase la sección 1.5.2), por lo que se le pueden aplicar las críticas de esta propuesta. No hemos profundizado en el comportamiento del modelo para otros conjuntos de operadores, pero parece difícil que exista alguna opción viable, al combinar este modelo dos ideas (la realización de una interpolación entre el cuantificador universal y el existencial, y la generalización de la medida *FE-Count*) que no parecen permitir la definición de modelos válidos<sup>44</sup>.

En [100, pág. 394] Yager propone una expresión que incluye como caso particular el modelo *FG-Count*:

$$Y_{abs}^{(1)}(\mu_Q)(X) = \max_{j=0, \dots, m} \left( \mu_Q(j) \otimes \left( \bigwedge_{i=0}^j \mu_{[i]}(X) \right) \right) \quad (1.25)$$

donde  $\otimes$  y  $\wedge$  representan dos tnormas cualquiera. Si  $\otimes = \wedge = \text{mín}$  entonces el modelo es equivalente al basado en la medida de cardinalidad *FG-Count* por lo que podemos entender el mismo como una generalización de esta propuesta para operadores arbitrarios.

---

<sup>44</sup>Con la excepción del modelo *GD* que hemos analizado en la sección 1.5.6.

El modelo  $Y_{abs}^{(1)}$  presenta los mismos problemas que el modelo basado en FG-Count con respecto a la descomposición de cuantificadores (véase la sección 1.5.3). Además, el modelado de cuantificadores no crecientes a través de las propiedades de negación externa e interna parece irreconciliable con esta generalización del modelo FGCount. Veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 25** *Se considera el siguiente conjunto borroso y la siguiente función de soporte:*

$$X = \{0,5/e_1, 0,5/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4, 0,5/e_5, 0,5/e_6\}$$

$$\mu_Q(x) = \begin{cases} 1 & : x < 2 \\ 0 & : x \geq 2 \end{cases}$$

*Supongamos, por ejemplo, que elegimos como tnorma  $\wedge$  el producto en la expresión 1.25 (la elección de la tnorma  $\otimes$  es indiferente ya que la función de soporte del cuantificador es nítida). Utilizando las transformaciones de negación externa y negación interna tenemos*

$$\mu_{\simeq Q}(x) = \begin{cases} 0 & : x < 2 \\ 1 & : x \geq 2 \end{cases}$$

$$\mu_{Q \simeq}(x) = \begin{cases} 0 & : x < 5 \\ 1 & : x \geq 5 \end{cases}$$

*Con lo que*

$$\begin{aligned} \simeq Y_{abs}^{(1)}(\mu_{\simeq Q})(X) &= \simeq \max_{j=0, \dots, m} \left( \min \left( \mu_{\simeq Q}(j), \prod_{i=0}^j \mu_{[i]}(X) \right) \right) \\ &= \simeq \max_{j=0, \dots, m} (\min(\mu_{\simeq Q}(j), 0,5^j)) \\ &= \simeq 0,5^2 \\ &= 0,75 \\ Y_{abs}^{(1)}(\mu_{Q \simeq})(\simeq X) &= Y_{abs}^{(1)}(\mu_{Q \simeq})(X) \\ &= \max_{j=0, \dots, m} (\min(\mu_{Q \simeq}(j), 0,5^j)) \\ &= 0,5^5 \\ &= 0,031 \end{aligned}$$

Nótese que en general

$$\simeq \bigwedge_{i=0}^2 0,5 \neq \bigwedge_{i=0}^5 0,5$$

para una tnorma distinta del mínimo, por lo que es fácil construir contraejemplos similares para otras tnormas.

En [100, pág. 398] también se propone un modelo que incluye al modelo basado en *FGCount* para cuantificadores proporcionales analizado en la sección 1.5.3. Este modelo generaliza la expresión 1.18 mediante la utilización de otros operadores borrosos. Como este modelo incluye al modelo definido en la expresión 1.25 como caso particular, la crítica realizada al mismo se extiende a esta propuesta. Además, las críticas realizadas en el apartado 1.5.3 al modelo basado en *FGCount* para cuantificadores proporcionales son aplicables a toda función de implicación continua<sup>45</sup>.

En este primer capítulo hemos introducido el problema de la cuantificación borrosa, realizando una breve exposición del marco tradicional de Zadeh y de la aproximación a la cuantificación planteada en la teoría de los cuantificadores generalizados, para explicar luego como Glöckner ha combinado las ideas de estos dos enfoques para establecer el marco de trabajo que vamos a seguir en esta memoria. Posteriormente hemos expuesto un conjunto de propiedades que permiten evaluar la calidad de las distintas aproximaciones a la cuantificación borrosa. También hemos realizado una revisión crítica de las distintas propuestas planteadas en la bibliografía. Esta revisión demuestra que la mayoría de las propuestas presentan defectos que las invalidan para muchas aplicaciones. De ahí que el estudio de nuevas aproximaciones para resolver el problema sea de interés en general y en particular para la tarea de recuperación de información abordada en esta memoria.

El propósito del próximo capítulo es la explicación de la interpretación probabilística de los conjuntos borrosos que subyace a los modelos de cuantificación que

---

<sup>45</sup>Recordemos que una de las críticas más importantes de este modelo se debían a la no continuidad del mismo. Sea  $I(x_1, x_2)$  una función de implicación continua. Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una bola centrada en  $(0, 0)$   $B((0, 0), \delta)$  tal que  $I(x, 0) > 1 - \epsilon$  para  $(x, 0) \in B((0, 0), \delta)$ . De esta manera el contraejemplo planteado en 1.5.3 a las propiedades de continuidad y monotonía también es aplicable en este caso.

Por otra parte, la utilización de funciones de implicación discontinuas tendría como consecuencia la discontinuidad del modelo de cuantificación resultante.

definiremos en el capítulo tres. Esto nos permite evitar la presentación “abstracta” de los modelos, tan habitual en el campo de la lógica borrosa y que tantas críticas suele suscitar a la disciplina.

## Capítulo 2

# Interpretaciones probabilísticas de los conjuntos borrosos

Una de las críticas más habituales a las que se ha tenido que enfrentar la teoría de los conjuntos borrosos es el significado y la medición de las funciones de pertenencia [7, 38, 39]. Pese a que la disciplina de los conjuntos borrosos ha progresado enormemente desde la publicación del primer trabajo de Zadeh [102] la interpretación de los grados de pertenencia ha estado situada siempre en un segundo plano, y sólo recientemente [38] parece haber comenzado a recibir la atención que realmente merece. En general, las matemáticas borrosas han sido desarrolladas principalmente como una teoría abstracta, con todos los problemas que esto puede entrañar. Los potenciales usuarios de la teoría tienen a su disposición una increíble amalgama de operadores y modelos borrosos pero muy poca guía acerca de como utilizar los mismos o como justificar los resultados obtenidos en su aplicación. Además, no todos los operadores y combinaciones son adecuados cuando pensamos en una aplicación concreta, ya que ciertas combinaciones pueden carecer de sentido para el problema que estemos intentando resolver.

Como Dubois y Prade enuncian en [7, pág 195]:

*“los conjuntos borrosos están completamente caracterizados por sus funciones de pertenencia y para poder eliminar la confusión existente y conseguir una teoría sólida de los conjuntos borrosos se necesita una semántica rigurosa y métodos de medición adecuados de las funciones de pertenencia”.*

En [38, pág. 141] Dubois y Prade van más allá y además de señalar estos problemas indican que muchas de las críticas que ha recibido la teoría de conjuntos borrosos se deben a la no existencia de una interpretación uniforme para los grados de pertenencia:

*“cuando se investiga en la literatura de conjuntos borrosos, incluidos los propios artículos de Zadeh, no existe uniformidad en la interpretación del significado de los grados de pertenencia. Esta situación ha causado muchas críticas por parte de los oponentes de los conjuntos borrosos, y también muchos malentendidos dentro del propio campo. Las afirmaciones más negativas que se encuentran en la bibliografía giran acerca de cuestiones relacionadas con la interpretación y la medición de los grados de pertenencia.”*

Por tanto, la interpretación de los grados de pertenencia y la representación matemática utilizada para representar los conjuntos borrosos son conceptos fundamentales. Es cierto que en algunas ocasiones particulares podemos calcular las funciones de pertenencia y decidir que operadores utilizar mediante técnicas de aprendizaje automático. Pero éste es sólo un caso particular aplicable en algunos problemas. En su origen la teoría de conjuntos borrosos fue planteada como una técnica sumamente expresiva de gran potencial para la representación del conocimiento y emulación del razonamiento humano. Y este es el poder real de la teoría de los conjuntos borrosos; el de permitirnos manejar reglas muy cercanas al lenguaje natural y al razonamiento humano de una manera transparente. Y para conseguir este propósito es importante saber que tipo de información podemos representar mediante los grados de pertenencia y los conjuntos borrosos, y cuales son las consecuencias de los formalismos matemáticos que utilicemos para representarlos.

Por esta razón hemos preferido introducir la semántica subyacente a los modelos de cuantificación que se plantean en esta memoria en lugar de presentar los mismos de una manera abstracta. Este punto, muchas veces ignorado en la definición de modelos de cuantificación, nos parece de importancia vital. El apartado de revisión de esta memoria (véase la sección 1.5) supone un argumento importante en la defensa de esta postura, ya que aquellos modelos de interpretación más dudosa son en general los que presentan un peor comportamiento teórico.

Tampoco queremos decir con esto que los modelos que se presentan en esta memoria mejoren el comportamiento de los existentes gracias a la interpretación de

los conjuntos borrosos subyacente. Es más, las interpretaciones de los mismos no son las más habituales desde el punto de vista de la teoría de conjuntos borrosos aunque existen diversos trabajos que las sustentan. Lo que queremos resaltar es que la interpretación de los conjuntos borrosos nos parece muy relevante, y que en un campo tan complejo como el de la cuantificación borrosa, la interpretación subyacente es de mucha importancia para comprender el comportamiento de los modelos y, huelga decirlo, ayudar también a entender sus posibles problemas.

El propósito de este capítulo es introducir la interpretación probabilística que subyace a los modelos de cuantificación que se plantean en el capítulo 3. El desarrollo del mismo es el siguiente. Primeramente introduciremos las distintas interpretaciones de los grados de pertenencia así como algunos de los formalismos matemáticos más habituales que se utilizan para representar los conjuntos borrosos. Seguidamente nos centraremos en las representaciones particulares que se utilizan en la definición de los modelos de esta memoria. La primera interpreta los conjuntos borrosos como verosimilitudes y es la base del modelo de cuantificación  $\mathcal{F}^A$  (sección 3.1); la segunda interpreta los conjuntos borrosos como conjuntos aleatorios y es la base de los modelos de cuantificación  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  (sección 3.2).

## 2.1. Interpretación de los grados de pertenencia

Según Dubois y Prade [38, 39] en la bibliografía podemos encontrar tres interpretaciones de los grados de pertenencia de los elementos de un conjunto borroso:

- **Grado de similaridad.** Desde este punto de vista el grado de pertenencia  $\mu_X(e)$  representa la distancia del elemento  $e$  a elementos “ideales” o “prototipo” para los cuales consideramos que la propiedad asociada a  $X$  se cumple con seguridad. Esta visión es muy interesante en la interpretación de los métodos de clusterización y el control borroso.

Por ejemplo, para determinar el grado de pertenencia de un coche  $c$  a la categoría “*grande*” podemos tomar un coche prototipo de la categoría (por ejemplo un Mercedes  $m$ ) y medir la distancia del mismo a este elemento prototipo. De esta manera podemos calcular el grado de pertenencia  $\mu_{grande}(c)$  como una función decreciente en función de la distancia a  $m$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>El ejemplo es una adaptación del planteado en [38].

- **Grado de preferencia.** Según este punto de vista  $\mu_X(e)$  representa el grado de preferencia del elemento  $e$  con respecto a los otros elementos del universo. Así, los conjuntos borrosos representan “restricciones flexibles”; es decir, condiciones que pueden ser cumplidas en mayor o menor grado, dependiendo del valor de  $\mu_X(e)$ . Esta visión está muy relacionada con la optimización borrosa (más específicamente con la programación lineal borrosa y con el análisis de la decisión).

Por ejemplo, si estamos interesados en comprar un coche grande entonces  $\mu_{grande}(c)$  representará un grado de preferencia y el conjunto borroso *grande* una restricción sobre los coches aceptables.

- **Grado de incertidumbre.** Desde el punto de vista de la teoría de la posibilidad  $\mu_X(e)$  representa el “grado de posibilidad” de que la variable  $v$  asociada al conjunto borroso  $X$  tome valor  $e$ . Desde este punto de vista los elementos pertenecientes al soporte de  $X$  son mutuamente exclusivos, y el conjunto  $X$  representa una ordenación de los mismos en función de dicho grado.

Esta alternativa es aplicable si, por ejemplo, escuchamos la frase “he visto un coche grande”. En esta situación el valor de pertenencia de un coche  $c$  al conjunto borroso *grande* indica la plausibilidad de que  $c$  sea el coche mencionado.

Nótese que en cierta medida, las interpretaciones se asocian a ciertos tipos de aplicaciones; es decir, el tipo de aplicación determina (aunque puede haber aplicaciones que mezclen varias visiones) la interpretación de los grados de pertenencia.

Por su parte Bilgiç et al. [7] no siguen esta división y relacionan directamente la interpretación de los grados de pertenencia con los formalismos matemáticos que nos permiten representarlos, enfatizando además la importancia de relacionar la representación matemática con los métodos que nos permiten construir las funciones de pertenencia.

Bilgiç et al. distinguen cinco formalismos matemáticos principales para representar los conjuntos borrosos: desde el punto de vista de la *verosimilitud*; desde el punto de vista de los *conjuntos aleatorios*; desde el punto de vista de la *similaridad*; desde el punto de vista de la *utilidad*; y desde el punto de vista de la *medición*. Las cuatro primeras suponen una representación numérica de los grados de pertenencia. La última no realiza dicha suposición, y plantea que la utilización de una estructura más débil (por ejemplo un conjunto ordenado) es suficiente. Por otra parte las dos primeras se adhieren a una interpretación frecuentista de los grados de pertenencia;

la tercera interpreta los grados de pertenencia como similaridades en función de distancias; y la cuarta interpreta los grados de pertenencia como costes.

A continuación realizamos una breve descripción de estas cinco representaciones [7]. Las dos primeras visiones son la base de los modelos propuestos en esta memoria y se presentan más brevemente porque se detallarán en el siguiente apartado. En la descripción de las visiones explicaremos la interpretación  $\mu_{\text{alto}}(\text{Pedro}) = 0,7$  (i.e., “*Pedro es alto en grado 0,7*”) desde cada una de ellas:

1. **Representación de los grados de pertenencia como verosimilitudes.** Bajo esta visión el 70 % de una población dada declara que “*Pedro es alto*”.
2. **Representación de los grados de pertenencia basada en conjuntos aleatorios.** Bajo esta visión el 70 % de la población describe “*alto*” como un intervalo que contiene la altura de Pedro.
3. **Representación de los grados de pertenencia como similaridades.** Bajo esta visión las funciones de pertenencia representan la distancia a elementos prototipo. Desde este punto de vista, la altura de Pedro se encuentra a una distancia de 0,3 de un objeto ideal considerado “*alto*” con seguridad. Esta representación está muy relacionada con la interpretación de grados de pertenencia como similaridades.
4. **Representación de los grados de pertenencia desde el punto de vista de la utilidad.** Según este punto de vista 0,7 es la utilidad de afirmar que Pedro es alto. Esta visión está relacionada con la interpretación de los grados de pertenencia como costes. En [39] se indica la utilización de “*toll sets*”<sup>2</sup> para manejar las funciones de coste.
5. **Representación de los grados de pertenencia desde el punto de vista de la teoría de la medición.** Desde este punto de vista no se asume que la escala que utilizamos para representar un conjunto borroso sea numérica. Un conjunto ordenado es suficiente. Incluso se puede suponer una abstracción mayor y asociar una relación de orden a los predicados  $(\geq_X)$ , de manera que  $e \geq_X e'$  indica que “*e es más X que e'*”, donde  $X$  es un predicado.

---

<sup>2</sup>Una alternativa a los conjuntos borrosos en los que se utiliza la escala  $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ . El valor de pertenencia indica el coste de afirmar que un elemento pertenece a una categoría. Así, si la altura de Pedro fuese  $2m.$ , entonces el coste de afirmar que es alto sería 0, y el de afirmar que no es alto sería  $\infty$ .

Por nuestra parte nos parece adecuado considerar que la clasificación planteada por Dubois y Prade determina los significados que se puede asociar a los grados de pertenencia, mientras que la clasificación planteada por Bilgiç et al., determina las representaciones formales que se pueden utilizar para representarlos.

Hasta cierto punto, las distintas representaciones se pueden utilizar para representar las tres interpretaciones (similaridad, preferencia, incertidumbre) de los grados de pertenencia, aunque algunas puedan ser preferibles dependiendo del significado que queramos manejar. Por ejemplo, supongamos que  $\mu_X(e)$  representa una verosimilitud. Entonces podemos interpretar los grados de pertenencia como similaridades suponiendo que  $\mu_X(e)$  representa la probabilidad de que el elemento  $e$  sea calificado como  $X$  (“ $e$  es  $X$ ”); es decir,  $\mu_X(e) > \mu_X(e')$  indica que es más probable la afirmación de que  $e$  pertenece al conjunto de elementos ideales que la afirmación de que  $e'$  pertenece a dicho conjunto. Desde el punto de vista de la preferencia  $\mu_X(e) > \mu_X(e')$  indica que es más probable elegir  $e$  que  $e'$  de acuerdo con el criterio representado por  $X$ . Y desde el punto de vista de la incertidumbre  $\mu_X(e) > \mu_X(e')$  indica que es más probable que  $e$  se ajuste a la restricción que  $e'$ .

Supongamos ahora que  $\mu_X(e)$  representa una similaridad (desde el punto de vista de Bilgiç et al.). Podemos interpretar  $\mu_X(e)$  como una preferencia suponiendo que los elementos “ideales” de  $X$  son aquellos que preferimos con seguridad. Y podemos interpretar  $\mu_X(e)$  como una posibilidad suponiendo que los elementos “ideales” son aquellos perfectamente plausibles.

En general, las representaciones anteriores se relacionan con distintos modelos para la medición experimental de las funciones de pertenencia. Aunque siempre existe la alternativa de representar las funciones de pertenencia subjetivamente y asumir luego una de las visiones operativas anteriores. Otra alternativa para la construcción de las funciones de pertenencia es la utilización de técnicas de aprendizaje automático (e.g. redes neuronales o alguna aproximación similar) para seleccionar las funciones que más se adaptan a los datos observados.

Además de las representaciones anteriores podemos considerar una sexta, la cual introducimos por ser subyacente a los modelos de cuantificación planteados en [41, 45, 47, 50] (véase la sección 1.5.7):

- 6. Representación de los grados de pertenencia desde el punto de vista de la prudencia.** Desde este punto de vista el valor de pertenencia  $\frac{1}{2}$  representa el máximo nivel de prudencia. Ante la afirmación: el grado de pertenencia

de Pedro al conjunto borrosos “alto” es  $\frac{1}{2}$  tenemos inseguridad absoluta acerca de si es más correcto aplicar la etiqueta “alto” o “no alto” a Pedro. Valores más cercanos a 0 o a 1 indican mayor aplicabilidad de la etiqueta “no alto” o “alto” respectivamente. Los modelos planteados en [41, 45, 47, 50] se apoyan en representaciones de los conjuntos borrosos basadas en conjuntos trivaluados que se vinculan a esta interpretación.

En los siguientes apartados explicamos la representación basada en verosimilitudes y la representación basada en conjuntos aleatorios en mayor detalle, ya que son la base de los modelos de cuantificación planteados en la memoria. No obstante es importante destacar que el modelo  $\mathcal{F}^A$  (que se plantea en el próximo capítulo) también se pueden interpretar desde el punto de vista de las similaridades<sup>3</sup>.

## 2.2. Interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes

En esta sección desarrollamos la interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes. Esta interpretación será la base del QFM  $\mathcal{F}^A$  que plantearemos en la sección 3.1.

La interpretación semántica de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes [7, 39, 70, 87] interpreta la vaguedad como la consecuencia de las diferencias de opiniones de los individuos. Bajo este supuesto, es posible medir la vaguedad de un hecho realizando un experimento aleatorio en el que preguntamos a un grupo de individuos su opinión acerca del cumplimiento del mismo. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 26** *Supongamos que tenemos decidir si el valor de altura 185cm. se considera “alto para hombres adultos”. Para resolver este problema planteamos un experimento aleatorio en el que preguntamos a cuatro individuos o votantes ( $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ) si consideran cierto el enunciado  $P$  “el valor de altura 185cm. es alto”. Denotemos por  $C_P(v) \in \mathbf{2}$ ,  $v \in V$  la respuesta de cada votante, y supongamos que las respuestas de los votantes han sido las siguientes:*

$$C_P(v_1) = 1, C_P(v_2) = 0, C_P(v_3) = 1, C_P(v_4) = 1$$

---

<sup>3</sup>En la sección 3 se planteará esta alternativa para el modelo  $\mathcal{F}^A$ .

entonces podemos definir el grado de cumplimiento del predicado  $P$  como

$$\begin{aligned}\mu(P) &= \frac{|v \in V : C_P(v) = 1|}{|V|} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

El experimento anterior se puede plantear sobre todo el universo de alturas  $\mathbb{R}$ . Sea  $h \in \mathbb{R}$ . Podemos definir el grado de pertenencia asociado a “el valor de altura  $h$  es alto” como

$$\begin{aligned}\mu(\text{“}h \text{ es alto”}) &= \Pr(\text{“}h \text{ es } alto\text{”}) \\ &= \frac{|v \in V : C_{\text{“}h \text{ es alto”}}(v) = 1|}{|V|}\end{aligned}$$

De esta manera se asigna un grado de pertenencia a todo el universo de referencia. En la notación habitual de los conjuntos borrosos se asocia a la etiqueta “alto” un conjunto borroso  $alto \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  definido como

$$\mu_{alto}(h) = \mu(\text{“}h \text{ es alto”})$$

Nótese que bajo esta visión  $\mu_{alto}(h) > \mu_{alto}(h')$  indica que es más probable que se considere cierto “ $h$  es alto” que “ $h'$  es alto”.

Una de las suposición aceptable cuando se adopta esta visión es la hipótesis de independencia que consiste en no suponer que la respuesta de los votantes para un determinado valor  $h \in \mathbb{R}$  condiciona su respuesta para otro elemento  $h'^4$ . Supongamos ahora que el universo de referencia  $E$  es finito y sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ . Puesto que estamos interpretando que

$$\mu_X(e) = \Pr(\text{“}e \text{ es } X\text{”})$$

entonces bajo la hipótesis de independencia tendremos que

$$\begin{aligned}\Pr(\text{“}e \text{ es } X\text{”} \wedge \text{“}e' \text{ es } X\text{”}) &= \Pr(\text{“}e \text{ es } X\text{”}) \cdot \Pr(\text{“}e' \text{ es } X\text{”}) \\ &= \mu_X(e) \cdot \mu_X(e')\end{aligned}\tag{2.1}$$

---

<sup>4</sup>La situación de que la respuesta de los individuos condicione sus decisiones sobre otros elementos del universo está más relacionada con la representación de conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios que vamos a tratar en el siguiente apartado.

Podemos extender la idea anterior para definir la probabilidad de que un conjunto nítido  $Y \in \mathcal{P}(E)$  sea el representante de un conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  cuando suponemos el referencial  $E$  finito. Intuitivamente, esta probabilidad es la probabilidad de que solamente los elementos de  $Y$  pertenezcan a  $X$ . Formalmente:

**Definición 90** ( $\Pr(\text{representative}_X = Y)$ ) Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ ,  $E$  finito. Se define la probabilidad de que el conjunto nítido  $Y \in \mathcal{P}(E)$  sea un representante del conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  como

$$\Pr(\text{representative}_X = Y) = \prod_{e \in Y} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} (1 - \mu_X(e))$$

Nótese que en la definición anterior los puntos de probabilidad son los subconjuntos de  $E$ . De esta manera la  $\sigma$ -álgebra sobre la que está definida la probabilidad es  $\mathcal{P}(E)$ .<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Aunque hemos sustentado la definición de  $\Pr(\text{representative}_X = Y)$  en una interpretación probabilística de los conjuntos borrosos, nos parece importante señalar que es posible separar la definición anterior de esta interpretación probabilística. En [92] se define la equipotencia entre un conjunto nítido  $Y \in \mathcal{P}(E)$  y un conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  como

$$Eq(Y, X) = \wedge_{e \in E}^1 (\mu_X(e) \rightarrow \mu_Y(e)) \wedge \wedge_{e \in E}^2 (\mu_Y(e) \rightarrow \mu_X(e))$$

donde  $\wedge^1, \wedge^2$  son tnormas y  $\rightarrow$  una función de implicación borrosa.

$Eq(Y, X)$  se puede interpretar como la similaridad entre el conjunto nítido  $Y \in \mathcal{P}(E)$  y el conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Para el caso particular en el cual  $\wedge^1(x_1, x_2) = \wedge^2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  (tnorma producto) y  $\rightarrow(x_1, x_2) = \min(1, 1 - x_1 + x_2)$  (implicación de Lukasiewicz) tenemos:

Si  $e \in E$  entonces  $\mu_Y(e) = 1$  con lo que

$$(\mu_X(e) \rightarrow \mu_Y(e)) \wedge (\mu_Y(e) \rightarrow \mu_X(e)) = \mu_X(e)$$

Si  $e \notin E$  entonces  $\mu_Y(e) = 0$  con lo que

$$(\mu_X(e) \rightarrow \mu_Y(e)) \wedge (\mu_Y(e) \rightarrow \mu_X(e)) = 1 - \mu_X(e)$$

Así,

$$\begin{aligned} Eq(Y, X) &= (\wedge_{e \in E} \mu_X(e)) \wedge (\wedge_{e \notin E} (1 - \mu_X(e))) \\ &= \prod_{e \in Y} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} (1 - \mu_X(e)) \end{aligned}$$

Aunque hemos escogido la implicación de Lukasiewicz, el resultado anterior es válido para toda función de implicación tal que  $\rightarrow(1, x_2) = x_2$ .

En adelante utilizaremos la siguiente notación para representar esta probabilidad.

**Notación 27** ( $m_X(Y)$ ) Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso e  $Y \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto nítido. Denotaremos

$$m_X(Y) = \Pr(\text{representative}_X = Y) \quad (2.2)$$

Veamos ahora un ejemplo en el que se calcula la probabilidad de un representante nítido de un conjunto borroso:

**Ejemplo 28** Sea  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  el conjunto referencial y  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso definido como

$$X = \{0,8/e_1, 0,2/e_2, 0,6/e_3\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} m_X(\{e_1, e_3\}) &= \prod_{e \in Y} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} (1 - \mu_X(e)) \\ &= \mu_X(e_1) \times \mu_X(e_3) \times (1 - \mu_X(e_2)) \\ &= 0,8 \times 0,6 \times (1 - 0,2) \\ &= 0,384 \end{aligned}$$

En ocasiones vamos a necesitar restringir la probabilidad de un conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  a un subconjunto  $E' \subseteq E$  del conjunto referencial. Sea  $X^{E'} \in \tilde{\mathcal{P}}(E')$  la proyección de  $X$  en  $E'$ ; es decir,  $X'$  es el conjunto borroso sobre  $E'$  definido como

$$\mu_{X'}(e) = \mu_X(e), e \in E'$$

En este caso vamos a denotar la probabilidad de  $X'$  sobre  $E'$  de la siguiente manera:

**Notación 29** ( $m_X^{E'}(Y)$ ) Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso,  $E' \subseteq E$  una restricción del conjunto referencial e  $Y \in \mathcal{P}(E')$  un conjunto nítido sobre  $E'$ . Denotaremos

$$m_X^{E'}(Y) = m_{X'}(Y)$$

donde  $X'$  es la proyección de  $X$  sobre  $E'$ ; es decir, el conjunto borroso definido como

$$\mu_{X'}(e) = \mu_X(e), e \in E'$$

Cuando sea de utilidad también vamos a utilizar la notación anterior para explicitar el referencial sobre el que estemos trabajando.

Sea  $e \in E$  un elemento cualquiera. Se cumple que la probabilidad asociada a los conjuntos que contienen a  $e$  es justamente  $\mu_X(e)$ ; esto es, la probabilidad de que  $e$  cumpla la propiedad asociada a  $X$  es la misma que la suma de las probabilidades de los representantes que contienen a  $E$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) | e \in Y} m_X(Y) &= \sum_{\{e\} \subseteq Y \subseteq E} m_X(Y) \\
 &= \sum_{\{e\} \subseteq Y \subseteq E} \mu_X(e) m_X^{E \setminus \{e\}}(Y \setminus \{e\}) \\
 &= \mu_X(e) \sum_{\emptyset \subseteq Y \subseteq E \setminus \{e\}} m_X^{E \setminus \{e\}}(Y) \\
 &= \mu_X(e)
 \end{aligned}$$

ya que  $\sum_{\emptyset \subseteq Y \subseteq E \setminus \{e\}} m_X^{E \setminus \{e\}}(Y) = 1$  porque es la suma de las probabilidades de todos los representantes de  $X^{E \setminus \{e\}}$  en  $E \setminus \{e\}$ . Intuitivamente, sólo nos interesa el cumplimiento de la propiedad para el elemento  $e$ , siendo indiferente si esta se cumple para el resto de los elementos del referencial  $E$ .

Se considera ahora la situación en la que queremos calcular la probabilidad de que dos conjuntos nítidos  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  sean respectivamente los representantes de dos conjuntos  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  borrosos. Es decir, se considera el cálculo de la probabilidad del evento “ $representative_{X_1} = Y_1 \wedge representative_{X_2} = Y_2$ ”.

Si los conjuntos borrosos  $X_1$  y  $X_2$  se refieren a distintos universos de referencia (e.g. peso y altura) es razonable suponer que la probabilidad de que  $Y_1$  sea representante de  $X_1$  es independiente de la probabilidad de que  $Y_2$  sea representante de  $X_2$ <sup>6</sup>. Nótese que una vez hemos supuesto que las decisiones de los votantes son independientes para elementos referidos a la misma propiedad (expresión 2.1) es lógico suponer independencia para elementos referidos a distintas propiedades. Así definimos:

---

<sup>6</sup>En el trabajo [87] se analiza en profundidad la interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes. En [87, pág. 95] el autor argumenta que lo más razonable es suponer independencia entre distintos universos.

**Definición 91** ( $\Pr(\text{representative}_{X_1} = Y_1 \wedge \text{representative}_{X_2} = Y_2)$ ) Sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos,  $Y_1, Y_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos nítidos, y  $E$  un referencial finito. Bajo la hipótesis de independencia anteriormente explicada la probabilidad de que  $Y_1$  sea representante de  $X_1$  e  $Y_2$  sea representante de  $X_2$  es:

$$\Pr(\text{representative}_{X_1} = Y_1 \wedge \text{representative}_{X_2} = Y_2) = m_{X_1}(Y_1) \cdot m_{X_2}(Y_2)$$

donde se ha supuesto que los conjuntos  $X_1$  y  $X_2$  se construyen a partir de conceptos independientes.

Los modelos de cuantificación que se presentan en esta memoria se aplican a conjuntos borrosos numéricos. En general, estos conjuntos se suponen construidos a partir de la aplicación de ciertas etiquetas (e.g, “pesado” y “alto”) a los valores de ciertas propiedades (e.g, “altura” y “peso” para las etiquetas “pesado” y “alto”) que se miden sobre los elementos del conjunto base (por ejemplo individuos). Pero como constatan algunos autores [70,87]) bajo las interpretaciones probabilísticas de los conjuntos borrosos parece necesario utilizar distintas operativas en función de los términos lingüísticos que estemos manejando. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 30** Consideremos el enunciado “el valor de altura 185cm. es alto o no alto”, equivalente semánticamente a “el valor de altura 185cm. es alto” o “el valor de altura 185cm. es no alto”. Denotemos por  $P'$  el predicado “el valor de altura 185cm. es alto” y por  $P''$  el predicado “el valor de altura 185cm. es no alto”, este último equivalente semánticamente a “es falso que el valor de altura 185cm. sea alto”. Sea  $v$  un votante cualquiera; es razonable que si

$$C_{P'}(v) = 1$$

entonces

$$C_{P''}(v) = 0$$

Además,

$$C_{P' \vee P''}(v) = 1$$

Si consideramos de nuevo el conjunto de votantes  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  entonces el único resultado razonable del experimento aleatorio es

$$C_{P' \vee P''}(v_1) = C_{P' \vee P''}(v_2) = C_{P' \vee P''}(v_3) = C_{P' \vee P''}(v_4) = 1$$

y así

$$\begin{aligned}\mu ("h \text{ es alto o no alto}") &= \Pr ("h \text{ es alto o no alto}") \\ &= \frac{|\{v \in V : C_{"h \text{ es alto o no alto"}}(v) = 1\}|}{|V|} \\ &= 1\end{aligned}$$

Nótese que para este ejemplo la suposición de independencia no es razonable. Retomaremos esta idea en el capítulo 3, en el cual se definen algunos QFMs basados en las interpretaciones de los conjuntos borrosos que se explican en este capítulo.

## 2.3. Interpretación de los conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios

En esta sección explicamos la interpretación de conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios, que es la base de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  que desarrollaremos en la sección 3.2.

La interpretación semántica de los conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios [7,37,39] también interpreta la vaguedad como consecuencia de las diferencias de opinión de los individuos. Pero a diferencia de la interpretación basada en verosimilitudes, esta interpretación considera cierta coherencia en las decisiones de los individuos para los distintos elementos del referencial. Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 31** *Supongamos el mismo experimento que en el ejemplo 26, pero extendamos el experimento a todos los posibles valores de altura (e.g,  $h \in \mathbb{R}$ ) en vez de considerar únicamente un valor concreto. Si un individuo considera que el predicado "h es alto" es cierto para un determinado valor de altura  $h$ , entonces es razonable que dicho individuo considere el predicado "h' es alto" cierto para cualquier valor  $h' > h$ . De esta manera, las decisiones de los individuos pasan a ser intervalos de  $\mathbb{R}$ . Así, por ejemplo*

$$\Gamma(v_1) = [170, \infty), \Gamma(v_2) = [175, \infty), \Gamma(v_3) = [180, \infty), \Gamma(v_4) = [180, \infty)$$

donde por  $\Gamma : V \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  estamos representando la función que asocia a cada individuo  $v$  el intervalo de valores para los cuales considera que el predicado "h es alto" es cierto.

En [61] se plantea la siguiente definición de conjunto aleatorio, que permite formalizar el experimento anterior:

**Definición 92** [61, pág. 44] Sea  $(V, \beta(V), \text{Pr})$  un espacio de probabilidad finito,  $E$  un conjunto referencial no vacío arbitrario, y  $\Gamma : V \rightarrow \mathcal{P}(E)$  una función valuada sobre conjuntos. El par  $(\text{Pr}, \Gamma)$  se denomina conjunto aleatorio. Los conjuntos  $\Gamma(v)$ ,  $v \in V$ , se denominan elementos focales de  $(\text{Pr}, \Gamma)$ .

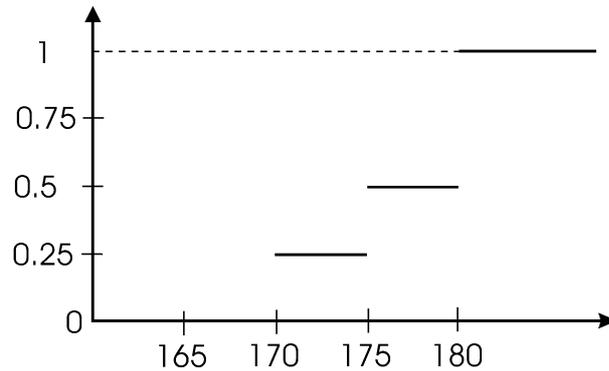
La medida de probabilidad  $\text{Pr} : \beta(V) \rightarrow [0, 1]$  se puede utilizar para asignar pesos al conjunto de individuos que intervienen en el experimento aleatorio. De igual manera que para la interpretación basada en verosimilitudes vamos a suponer equiprobabilidad.

Esta definición es equivalente a la de *función de asignación de masas* utilizada de la teoría de asignación de masas [3, pág. 353]. En la teoría de asignación de masas una función de *asignación de masa* es toda función  $m : 2^E \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\sum_{S \subseteq E} m(S) = 1$ . Las funciones de asignación de masas son a su vez una forma débil de las *asignaciones de probabilidad básicas* manejadas en la teoría de Dempster y Shafer [81, pág. 38], en las que se supone que el conjunto vacío puede tener asociada una probabilidad no nula. En la teoría de asignación de masas se interpretan los conjuntos borrosos a partir de los denominados modelos de votación, que no son más que experimentos frecuentistas similares a los presentados en los ejemplos 26 y 31 en los que se supone que todos los votantes tienen asociada la misma probabilidad.

**Definición 93** Sea  $(\text{Pr}, \Gamma)$  un conjunto aleatorio. La probabilidad asociada a un elemento focal  $\Gamma_i \in \mathcal{P}(E)$  es

$$m(\Gamma_i) = \sum_{v \in V: \Gamma(v) = \Gamma_i} \text{Pr}(\{v\})$$

**Ejemplo 32** (continuación del ejemplo 31) Los elementos focales del ejemplo 31 son los conjuntos  $\Gamma(v_1) = [170, \infty)$ ,  $\Gamma(v_2) = [175, \infty)$ ,  $\Gamma(v_3) = [180, \infty)$ ,  $\Gamma(v_4) =$



**Figura 2.1:** Función de pertenencia derivada del experimento aleatorio del ejemplo 32.

$[180, \infty)$ . Suponiendo los elementos de  $V$  equiprobables tendremos que

$$m([170, \infty)) = \sum_{v \in V: \Gamma(v)=[170, \infty)} \Pr(\{v\}) = \frac{1}{4}$$

$$m([175, \infty)) = \sum_{v \in V: \Gamma(v)=[175, \infty)} \Pr(\{v\}) = \frac{1}{4}$$

$$m([180, \infty)) = \sum_{v \in V: \Gamma(v)=[180, \infty)} \Pr(\{v\}) = \frac{1}{2}$$

El predicado  $P$  “178cm. es alto” es considerado cierto por los individuos  $v_1$  y  $v_2$ , y falso por  $v_3$  y  $v_4$ . De igual manera que en la interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes, podemos definir el grado del cumplimiento de  $P$ :

$$\begin{aligned} \mu(P) &= \frac{|\{v \in V : 178 \in \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Los grados de pertenencia obtenidos con el experimento aleatorio se representan en la figura 2.1.

En la notación habitual de los conjuntos borrosos asociamos a la etiqueta “alto” el conjunto borroso  $alto \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  definido como

$$\mu_{alto}(h) = \mu(\text{“}h \text{ es alto”}) = \Pr(\{v \in V : h \in \Gamma(v)\})$$

En la interpretación de los conjuntos borrosos que estamos considerando  $\mu_{alto}(h) > \mu_{alto}(h')$  no sólo indica que el predicado “ $h$  es alto” es más probable que el predicado

“ $h'$  es alto”, sino que “ $h$  es alto” es cierto siempre que se considere cierto que “ $h'$  es alto”.

En el ejemplo 31 se cumple que los elementos focales están “encajados”; es decir, existe una ordenación de los elementos focales tal que todo conjunto está contenido en el posterior ( $\Gamma(v_4) = \Gamma(v_3) \subset \Gamma(v_2) \subset \Gamma(v_1)$ ). Para formalizar recurriremos al concepto de consonancia:

**Definición 94** *Se dice que un conjunto aleatorio es consonante si sus elementos focales están encajados; es decir, para todo  $v, v' \in V$  se cumple que  $\Gamma(v) \subseteq \Gamma(v')$  o  $\Gamma(v') \subseteq \Gamma(v)$ .*

Los conjuntos aleatorios consonantes surgen, de manera natural, cuando se puede establecer una ordenación de los elementos del referencial  $E$  de forma que la elección de un elemento  $e$  como cumplidor de una propiedad  $P$ , condicione la elección de todos aquellos  $e'$  tales que  $e' \geq e$ . Esto implica que  $\mu_X(e') \geq \mu_X(e)$  siempre que  $e' \geq e$ . En este caso, la función  $\mu_X$  permite recuperar los elementos focales de  $(\text{Pr}, \Gamma)$  y la función de masa de probabilidad asociada a los mismos:

**Teorema 33** [3,37] *Sea  $X \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto borroso y supongamos que  $\mu_X(e_1) \geq \mu_X(e_2) \geq \dots \geq \mu_X(e_m)$ . Denotemos por  $Y_i$  el conjunto nítido  $\{e_1, \dots, e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Bajo la interpretación de conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios se cumple que  $Y_i$  es elemento focal si y sólo si  $\mu_X(e_i) > \mu_X(e_{i+1})$ . Además, la masa de probabilidad asociada a  $Y_i$  es<sup>7</sup>*

$$\begin{aligned} m_X(Y_i) &= \mu_X(e_i) - \mu_X(e_{i+1}), 1 \leq i \leq m \\ m_X(\emptyset) &= 1 - \mu_X(e_1) \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que  $\mu_X(e_{m+1}) = 0$ .

Para cualquier  $Y \in \mathcal{P}(E)$  tal que  $Y \neq \emptyset, Y \neq Y_i, i = 1, \dots, m$  entonces  $m_X(Y) = 0$ .

**Demostración.** Como los elementos focales están encajados, entonces todo  $Y_i$  focal debe tener la expresión  $Y_i = \{e_1, \dots, e_i\}$ . Si  $\mu_X(e_i) = \mu_X(e_{i+1})$  entonces todo votante que considere  $e_{i+1}$  como cumplidor de la propiedad asociada a  $X$  estará forzado

<sup>7</sup>Se está utilizando la misma notación  $m_X(Y)$  (véase la notación 27) que para la interpretación de conjuntos borrosos basada en verosimilitudes.

a considerar también a  $e_i$  como cumplidor de la misma, con lo que  $Y_i$  no puede ser focal. Como

$$e_i \in \Gamma(v) \Rightarrow \forall e_j \leq e_i, e_j \in \Gamma(v)$$

entonces

$$\begin{aligned} m_X(Y_i) &= \frac{|\{v \in V : Y_i = \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= \frac{|\{v \in V : e_i \in \Gamma(v) \wedge e_{i+1} \notin \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= \frac{|\{v \in V : e_i \in \Gamma(v)\}| - |\{v \in V : e_{i+1} \in \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= \mu_X(e_i) - \mu_X(e_{i+1}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_X(\emptyset) &= \frac{|\{v \in V : \emptyset = \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= \frac{|\{v \in V : e_1 \notin \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= \frac{|V| - |\{v \in V : e_1 \in \Gamma(v)\}|}{|V|} \\ &= 1 - \mu_X(e_1) \end{aligned}$$

En el caso de que  $Y$  no sea focal resulta evidente que  $m_X(Y) = 0$ . ■

**Ejemplo 34** Sea  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_5\}$  un conjunto de individuos y  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  el conjunto borroso

$$X = \{0,8/e_1, 1/e_2, 0,5/e_3, 0,5/e_4, 0,2/e_5\}$$

que puede representar, por ejemplo, la propiedad “ser alto” para dicho conjunto de individuos. Es razonable que  $X$  surja a partir de una votación consonante. La ordenación intuitiva del referencial es  $e_2 > e_1 > e_3 \geq e_4 > e_5$ . Y los elementos focales derivados de esta ordenación son:

$$Y_1 = \{e_2\}$$

$$Y_2 = \{e_1, e_2\}$$

$$Y_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$Y_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Con lo que la asignación de probabilidad básica de los elementos focales es:

$$\begin{aligned} m_X(Y_1) &= \mu_X(e_2) - \mu_X(e_1) = 1 - 0,8 = 0,2 \\ m_X(Y_2) &= \mu_X(e_1) - \mu_X(e_3) = 0,8 - 0,5 = 0,3 \\ m_X(Y_3) &= \mu_X(e_3) - \mu_X(e_5) = 0,5 - 0,2 = 0,3 \\ m_X(Y_4) &= \mu_X(e_5) = 0,2 \end{aligned}$$

En la práctica, en la interpretación de los conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios supondremos que los conjuntos borrosos surgen de experimentos similares al planteado en el ejemplo 31, y que por lo tanto siempre es posible recuperar la asignación de probabilidad subyacente al mismo.

Nótese que los elementos focales  $Y_i$  que estamos seleccionando se corresponden con el conjunto de *alfa-cortes* de  $X$ , por lo que  $m_X(Y_i)$  se puede expresar también como

$$m_X(Y_i) = \lambda(\{\alpha \in (0, 1] : X_{\geq \alpha} = Y_i\})$$

donde con  $\lambda(x)$  denotamos la medida de Lebesgue; y como

$$\mu_X(e_i) = \mu_X(e_i) - \mu_X(e_{i+1}) + \mu_X(e_{i+1}) - \mu_X(e_{i+2}) + \dots + \mu_X(e_m) - \mu_X(e_{m+1})$$

(recordemos que por definición  $\mu_X(e_{m+1}) = 0$ ). Entonces se cumple

$$\begin{aligned} \mu_X(e_i) &= m_X(Y_i) + m_X(Y_{i+1}) + \dots + m_X(Y_m) \\ &= \lambda(\{\alpha \in (0, 1] : X_{\geq \alpha} = Y_i\}) + \lambda(\{\alpha \in (0, 1] : X_{\geq \alpha} = Y_{i+1}\}) \\ &\quad + \dots + \lambda(\{\alpha \in (0, 1] : X_{\geq \alpha} = Y_m\}) \\ &= \lambda(\{\alpha \in (0, 1] : X_{\geq \alpha} = Y_i \vee X_{\geq \alpha} = Y_{i+1} \vee \dots \vee X_{\geq \alpha} = Y_m\}) \\ &= \lambda(\{\alpha \in (0, 1] : Y_i \subseteq X_{\geq \alpha}\}) \\ &= \int_0^1 \mu_{X_{\geq \alpha}}(e_i) d\alpha \end{aligned}$$

Esta expresión también se cumple para el caso de que el conjunto referencial  $E$  sea infinito. En este caso, se puede interpretar el conjunto aleatorio que subyace al conjunto borroso  $X$  a partir de una asignación de probabilidad uniforme sobre los niveles de corte de  $X$ :

$$\Pr(\alpha) = 1, \alpha \in [0, 1]$$

De esta manera podemos interpretar que la vaguedad es una consecuencia de los distintos grados de “especificidad” (niveles de corte) de los votantes cuando deciden

que subconjunto del referencial cumple la propiedad asociada al conjunto borroso en cuestión; es decir, suponemos que cada votante  $v$  tiene asociado un nivel de especificidad  $\rho$  de manera que  $X_{\geq\rho} = \Gamma(v)$ , y que los niveles de especificidad se distribuyen uniformemente sobre el conjunto de votantes. En definitiva, se asume que la vaguedad surge debido a las diferencias de especificidad entre los votantes, y que un conjunto borroso es un mecanismo para representar estas diferencias de especificidad.

En la siguiente sección se utiliza el concepto de “especificidad de los votantes” para establecer *perfiles de decisión*. Estos perfiles nos permitirán relacionar los niveles de especificidad de los votantes para distintas propiedades.

### 2.3.1. Perfiles de decisión

Hasta este momento no hemos realizado ninguna consideración acerca del nivel de especificidad de los votantes cuando se consideran distintas propiedades simultáneamente. En este caso podemos suponer, por ejemplo, que los votantes son altamente coherentes y establecer que sus niveles de especificidad son idénticos independientemente de la propiedad considerada. Otra posibilidad es suponer que los votantes no mantienen ninguna coherencia cuando consideran propiedades distintas, y asumir que su nivel de especificidad para una propiedad no establece ninguna restricción en su especificidad para otras [29, págs. 104-108].

Para modelar los niveles de especificidad de los individuos cuando se consideran varias propiedades vamos a utilizar funciones de probabilidad. Las dos alternativas que describimos a continuación son la base de dos de los QFMs que planteamos en el próximo capítulo:

- Perfil de máxima dependencia.** Este perfil interpreta que el nivel de especificidad  $\alpha$  asociado a cada votante  $v$  es idéntico para todas las propiedades. Nótese que esta interpretación asume la máxima coherencia posible en las decisiones de los votantes. Por ejemplo, si consideramos los conjuntos borrosos  $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$  asociados a las propiedades “*ser muy alto*” y “*ser muy rico*” entonces  $v$  escoge representantes del mismo nivel  $(X_1)_{\geq\alpha}, (X_2)_{\geq\alpha}$  para los conjuntos borrosos asociados a las propiedades mencionadas; es decir, si  $v$  es muy específico en sus decisiones para la propiedad “*ser muy alto*”, entonces  $v$  también va a ser muy específico en sus decisiones para la propiedad “*ser muy*

*rico*”.

Para modelar esta situación vamos a utilizar una función de densidad unidimensional uniforme; esto es,

$$\Pr(\alpha) = 1, \alpha \in [0, 1] \quad (2.3)$$

En la definición del modelo de cuantificación  $\mathcal{F}^{MD}$  (véase la sección 3.2.1) nos basaremos en este perfil.

- **Perfil de independencia.** Este perfil interpreta que la especificidad de los votantes es independiente para las distintas propiedades. Para modelar esta situación utilizaremos una función de densidad multidimensional uniforme

$$\Pr(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1] \quad (2.4)$$

Nótese que esta interpretación no asume ninguna coherencia en el comportamiento de los votantes para las distintas propiedades consideradas.

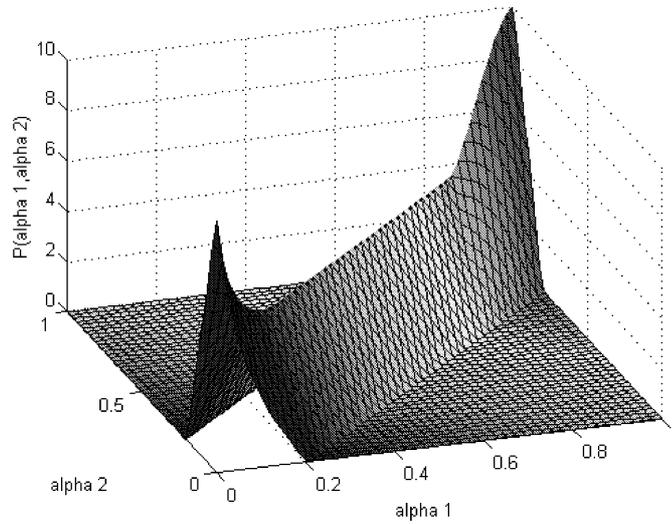
En la definición del modelo de cuantificación  $\mathcal{F}^I$  (véase la sección 3.2.1) nos basaremos en este perfil.

Aunque los modelos que se estudian en esta memoria son los derivados de los perfiles que se acaban de plantear, existen otras alternativas que merecen cierta consideración. Por ejemplo, podemos suponer que la especificidad de los individuos es “aproximadamente la misma” para las distintas propiedades y modelar esta situación mediante una función de densidad multidimensional que asocie probabilidades altas a los elementos de la diagonal  $(0, \dots, 0)$  y  $(1, \dots, 1)$  y probabilidades más bajas según nos alejamos de la misma. Por ejemplo, en [29, pág. 107] se menciona que en el caso binario se puede utilizar la siguiente función de probabilidad:

$$P^{AD}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} h_1 - \min\left(h_1, h_1 \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{\delta}\right) & 0 \leq \alpha_2 \leq \delta \\ \frac{1}{\delta} - \min\left(\frac{1}{\delta}, \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{\delta^2}\right) & \delta \leq \alpha_2 \leq 1 - \delta \\ h_2 - \min\left(h_2, h_2 \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{\delta}\right) & 1 - \delta \leq \alpha_2 \leq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $h_1 = -\frac{2}{\alpha_2^2 - 2\alpha_2\delta - \delta^2}\delta$ ,  $h_2 = \frac{2}{1 - 2\alpha_2 + \alpha_2^2 + \delta^2}\delta$  y  $0 \leq \delta < 0,5$  nos permite graduar la definición. En la figura 2.2 se muestra esta función para  $\delta = 0,2$ .

Otra posibilidad apuntada en [29, Págs. 108] para modelar la situación de dependencia aproximada es la realización de una interpolación entre los perfiles de máxima dependencia e independencia.



**Figura 2.2:** Función de densidad de probabilidad  $P(\alpha_1, \alpha_2)$  para modelar la dependencia aproximada en el caso binario.

En este capítulo hemos introducido las interpretaciones de los conjuntos borrosos en las cuales se basan nuestra propuesta de QFMs. Esta forma de proceder nos ha permitido, por una parte, explicar con cierto detalle la base en la que se sustentan estos QFMs, evitando el tener que mezclar la definición de los mismos con los detalles relacionados con la manipulación de los conjuntos borrosos. Además nos permite evitar una “presentación abstracta” de los QFMs, enfatizando la importancia de la interpretación subyacente.

En el próximo capítulo vamos a plantear y analizar tres QFMs que se basan en las interpretaciones de los conjuntos borrosos que acabamos de explicar. Veremos que la interpretación subyacente de los modelos no sólo es interesante como justificación de los modelos en sí, sino que también puede ser muy provechosa debido a su base probabilística. Este hecho, por ejemplo, nos va a permitir interpretar el resultado de evaluar una expresión cuantificada como una probabilidad. No obstante, veremos que existen más situaciones en las que los vínculos entre estos modelos y la teoría de probabilidades puede ser explotada.



## Capítulo 3

# QFMs probabilísticos para la cuantificación borrosa

En este capítulo se definen un conjunto de QFMs que se basan en la interpretación probabilística de los conjuntos borrosos explicada en el capítulo 3. Primeramente definiremos el QFM  $\mathcal{F}^A$ , que sigue la interpretación de conjuntos borrosos basada en verosimilitudes. A continuación definiremos un marco probabilístico para la definición de QFMs que sigue la interpretación de conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios. Dentro de este marco diferenciaremos dos modelos de comportamiento especial, los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ .

Tras la definición de los modelos  $\mathcal{F}^A$ ,  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  analizaremos su comportamiento teórico. Junto con este análisis hemos incluido también algunos ejemplos que nos parecen muy interesantes de cara a demostrar su utilidad.

El capítulo finaliza con una alternativa para el tratamiento de las situaciones de indeterminación (por ejemplo, caso de que la cardinalidad relativa esté indefinida en un cuantificador proporcional) que es posible bajo la semántica probabilística de los QFMs que proponemos en esta memoria.

### 3.1. QFM basado en verosimilitudes

En esta sección planteamos el QFM  $\mathcal{F}^A$ , definido en [34,35]. Este modelo se basa en la interpretación de conjuntos borrosos basada en verosimilitudes que hemos

explicado en la sección 2.2.

Aunque este modelo sólo es aplicable en dominios finitos su comportamiento teórico es excelente, tal como demostraremos cuando analicemos sus propiedades.

A partir de las definiciones 90 y 91 el planteamiento del QFM  $\mathcal{F}^A$  es inmediato:

**Definición 95** ( $\mathcal{F}^A$ ) [34, pág. 1359] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $E$  finito. El QFM  $\mathcal{F}^A$  se define como

$$\mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n) = \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \quad (3.1)$$

para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Nótese que se supone que la probabilidad de que  $Y_i$  sea representante de  $X_i$  es independiente de la probabilidad de que  $Y_j$  sea representante de  $X_j$  para  $i \neq j$ .

El modelo  $\mathcal{F}^A$  también se puede definir como

$$\mathcal{F}^A(X_1, \dots, X_n) = \bigvee_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \bigvee_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} Eq(Y_1, X_1) \wedge \dots \wedge Eq(Y_n, X_n) \wedge Q(Y_1, \dots, Y_n)$$

donde  $\vee(x_1, x_2) = \min(1, x_1 + x_2)$  es la tconorma de Lukasiewicz,  $\wedge(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  es la tnorma producto y  $Eq(Y_i, X_i)$  es la medida de equipotencia definida en la nota a pie de la página 129. De esta manera la definición del QFM  $\mathcal{F}^A$  también se puede expresar mediante operadores borrosos, sin hacer ninguna referencia a la teoría de probabilidades. Recordemos que  $Eq(Y_i, X_i)$  es una medida de la similaridad entre el conjunto nítido  $Y_i \in \mathcal{P}(E)$  y el conjunto borroso  $X_i \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ . Así, la expresión anterior puede interpretarse como la medida en la que existe algún par  $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{P}(E)^n$  cumpliendo el cuantificador semi-borroso (esto es  $Q(Y_1, \dots, Y_n)$ ) y tal que los  $Y_i$  sean lo más similares posible a los  $X_i$ .

El siguiente ejemplo muestra la aplicación del QFM  $\mathcal{F}^A$ :

**Ejemplo 35** Consideremos la evaluación de la siguiente sentencia cuantificada

*“Casi todos los estudiantes altos son rubios”*

donde el cuantificador semi-borroso  $Q = \text{“casi todos”}$ , y los conjuntos borrosos **altos**

y **rubios** toman los siguientes valores:

$$\mathbf{altos} = \{0,8/e_1, 0,9/e_2, 1/e_3, 0,2/e_4\}, \mathbf{rubios} = \{1/e_1, 0,8/e_2, 0,3/e_3, 0,1/e_4\}$$

$$Q(Y_1, Y_2) = \begin{cases} \text{máx} \left\{ 2 \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) - 1, 0 \right\} & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

El número borroso utilizado en la definición del cuantificador “casi todos” se representa en la figura 3.1.

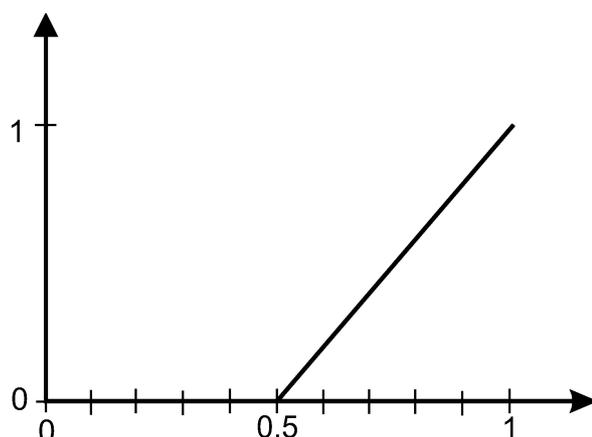
Calculamos las probabilidades de los representantes de **altos** y **rubios**:

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{altos}}(\emptyset) &= (1 - 0,8)(1 - 0,9)(1 - 1)(1 - 0,2) = 0 \\ m_{\mathbf{altos}}(\{e_1\}) &= 0,8(1 - 0,9)(1 - 1)(1 - 0,2) = 0 \\ m_{\mathbf{altos}}(\{e_2\}) &= (1 - 0,8) \cdot 0,9(1 - 1)(1 - 0,2) = 0 \\ &\dots \\ m_{\mathbf{altos}}(\{e_1, e_3, e_4\}) &= 0,8 \cdot (1 - 0,9) \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,016 \\ m_{\mathbf{altos}}(\{e_2, e_3, e_4\}) &= (1 - 0,8) \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,036 \\ m_{\mathbf{altos}}(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) &= 0,8 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,144 \\ \\ m_{\mathbf{rubios}}(\emptyset) &= (1 - 1)(1 - 0,8)(1 - 0,3)(1 - 0,1) = 0 \\ &\dots \\ m_{\mathbf{rubios}}(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) &= 0,8 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,144 \end{aligned}$$

Y aplicando la expresión 3.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^A(Q)(\mathbf{altos}, \mathbf{rubios}) &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) Q(Y_1, Y_2) \\ &= 0,346 \end{aligned}$$

El ejemplo que hemos presentado parece indicar que el cómputo del modelo puede hacerse prohibitivo al aumentar el número de elementos del referencial. No obstante, para cuantificadores cuantitativos (tal como es el caso del cuantificador del ejemplo), es posible desarrollar algoritmos de orden polinómico. En el apéndice B planteamos los algoritmos que permiten la evaluación de cuantificadores absolutos y proporcionales.



**Figura 3.1:** Número borroso proporcional asociado al cuantificador “casi todos” que se define en el ejemplo 35.

## 3.2. QFMs basados en conjuntos aleatorios

En esta sección utilizamos la interpretación de los conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios (véase la sección 2.3) para definir un marco probabilístico para la definición de QFMs. Posteriormente definimos los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ , los cuales se asocian respectivamente a los perfiles de máxima dependencia e independencia planteados en la sección 2.3.1. Finalizamos la misma realizando algunas consideraciones sobre otros modelos de cuantificación que encajan en este marco.

**Definición 96 (QFM relativo a  $P$ )** [29, pág. 104] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}, n > 0$  un cuantificador semi-borroso  $n$ -ario y  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  una función de densidad de probabilidad. Definimos el QFM relativo a  $P$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n) & \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1, \dots, d\alpha_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E), \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ .

En la definición 96 hemos utilizado una función de densidad de probabilidad  $n$ -dimensional  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  para describir la relación existente entre los niveles de especificidad de los individuos del supuesto experimento aleatorio asociado a esta interpretación de los conjuntos borroso (véase la sección 2.3). De esta manera, el

valor  $\mathcal{F}(Q)(X_1, \dots, X_n)$  se puede interpretar como la media de los valores de verdad de los individuos del experimento.

Se pueden plantear definiciones análogas a la definición 96 utilizando funciones de probabilidad discretas u otras funciones de probabilidad.

El mecanismo que se acaba de definir no es un QFM en el sentido amplio planteado en [47], ya que la integral puede no existir en el caso infinito. No obstante, el mecanismo si es aplicable en el caso finito además de serlo normalmente en el caso infinito. Volveremos a este punto en la discusión de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ .

### 3.2.1. QFM basado en conjuntos aleatorios de máxima dependencia

La interpretación subyacente al modelo que se va a definir en esta sección es que los votantes del supuesto experimento aleatorio eligen elementos focales del mismo nivel para las distintas propiedades (véase el perfil de máxima dependencia en la sección 2.3.1). Para modelar esta situación se utiliza una función de probabilidad uniforme que condiciona el comportamiento de los votantes sobre todas las propiedades:

$$P^{MD}(\alpha) = 1, 0 \leq \alpha \leq 1$$

Expresión ya presentada en 2.3. A partir de esta función de probabilidad definimos el QFM basado en conjuntos aleatorios de máxima dependencia de la siguiente manera:

**Definición 97** ( $\mathcal{F}^{MD}$ ) [29, sección 2.1] Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso sobre un referencial  $E$ . El QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  se define como

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n) = \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \quad (3.3)$$

para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

Cuando los conjuntos borrosos  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  están normalizados y nos limitamos a los cuantificadores unarios y binarios asociados a la dicotomía de Zadeh el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  es equivalente al modelo de cuantificación definido en [21, pág 281], [80, sección 3.3.2. y sección 3.4.1.], [22, pág. 37]. La situación de no normalización se maneja en dichos trabajos a través de una normalización de los conjuntos implicados que ha sido discutida en profundidad en la sección 1.5.6.

Anteriormente hemos mencionado que en el caso infinito existen cuantificadores semi-borrosos para los cuales la integral de la expresión 3.2 puede no existir. Por ejemplo, consideremos el cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

$$Q(X) = \begin{cases} 0 & : \text{ínf}(X) \in \mathbb{Q} \\ 1 & : \text{ínf}(X) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

y el siguiente conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}([0, 1])$

$$\mu_X(x) = x, x \in [0, 1]$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(Q)(X) &= \int_0^1 Q(X_{\geq \alpha}) d\alpha = \int_0^1 Q([\alpha, 1]) d\alpha \\ &= \int_0^1 \begin{cases} 0 & : \alpha \in \mathbb{Q} \\ 1 & : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} d\alpha \end{aligned}$$

y la integral inferior es distinta de la integral superior.

No obstante, el caso finito es el más importante para las aplicaciones y para muchos cuantificadores interesantes la integral existe en el caso infinito. La cuantificación borrosa sobre dominios infinitos ha sido muy poco estudiada y en esta memoria tampoco se profundiza en la misma.

Para referenciales finitos la expresión 3.3 es equivalente a

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^m m(\alpha_i) Q((X_1)_{\geq \alpha_i}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_i}) \quad (3.4)$$

donde  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m$  denota los valores de pertenencia en  $E$  de los elementos de los conjuntos borrosos  $X_1, \dots, X_n$ ,  $\alpha_0 = 1, \alpha_{m+1} = 0$ ; y  $m(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_{i+1}, i = 0, \dots, m$ .

**Ejemplo 36** Consideremos de nuevo el ejemplo 35. Los alfa-cortes de los conjuntos **altos** y **rubios** y la evaluación de  $Q$  para los distintos niveles de corte son:

	$(\mathbf{altos})_{\geq \alpha}$	$(\mathbf{rubios})_{\geq \alpha}$	$Q((\mathbf{altos})_{\geq \alpha}, (\mathbf{rubios})_{\geq \alpha})$
$\alpha \in (0, 9, 1]$	$\{e_3\}$	$\{e_1\}$	0
$\alpha \in (0, 8, 0, 9]$	$\{e_2, e_3\}$	$\{e_1\}$	0
$\alpha \in (0, 3, 0, 8]$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2\}$	$\frac{1}{3}$
$\alpha \in (0, 2, 0, 3]$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	1
$\alpha \in (0, 1, 0, 2]$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\frac{1}{2}$
$\alpha \in (0, 0, 1]$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	1

con lo que el resultado de evaluar la expresión es

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, X_2) = 0,42$$

En el caso de cuantificadores unarios cuantitativos definidos a partir de un número borroso coherente la expresión 3.3 coincide con el modelo de cuantificación de Yager basado OWA [94], tal como se demuestra en [22, 80]. En la siguiente proposición se demuestra que se puede generalizar la definición de los OWA a cuantificadores no crecientes:

**Proposición 3** Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario cuantitativo. Supongamos por simplicidad que  $\mu_X(e_1) \geq \mu_X(e_2) \geq \dots \geq \mu_X(e_m)$ . Definimos

$$\begin{aligned} w_0 &= Q(\emptyset) \\ w_i &= Q(\{e_1, \dots, e_i\}) - Q(\{e_1, \dots, e_{i-1}\}), i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ . Entonces

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X) = \sum_{i=0}^m w_i \cdot \alpha_i \quad (3.5)$$

donde  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m$  denotan los valores de pertenencia en  $E$  de los elementos de  $X$ ,  $\alpha_0 = 1$  y  $\alpha_{m+1} = 0$ .

**Demostración.** Es evidente que la expresión 3.4 para  $Q$  es

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X) = \sum_{i=0}^m Q(\{e_1, \dots, e_i\}) (\alpha_i - \alpha_{i+1})$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(Q)(X) &= \sum_{i=0}^m Q(\{e_1, \dots, e_i\}) (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\ &= Q(\{e_1, \dots, e_0\}) (\alpha_0 - \alpha_1) + Q(\{e_1, \dots, e_1\}) (\alpha_1 - \alpha_2) \\ &\quad + \dots + Q(\{e_1, \dots, e_{m-1}\}) (\alpha_{m-1} - \alpha_m) + Q(\{e_1, \dots, e_m\}) (\alpha_m - \alpha_{m+1}) \\ &= Q(\emptyset) \alpha_0 + (Q(\{e_1\}) - Q(\emptyset)) \alpha_1 + \dots + \\ &\quad + (Q(E) - Q(\{e_1, \dots, e_{m-1}\})) \alpha_m \end{aligned}$$

Nótese que para cuantificadores cuantitativos definidos a partir de números borrosos coherentes  $w_0, \dots, w_n$  son los pesos OWA [93, pág. 184]. Nótese también que para cuantificadores no crecientes los pesos  $w_0, \dots, w_n$  no definen una probabilidad. ■

### 3.2.2. QFM basado en conjuntos aleatorios de independencia

Este modelo se basa en la interpretación de que el elemento focal escogido por un votante para una propiedad no condiciona el elemento focal escogido para otras propiedades (véase el perfil de independencia en la sección 2.3.1). La función de probabilidad asociada a este modelo es:

$$P^I(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, n$$

Así, la expresión 3.2 para este caso es<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) & \quad (3.6) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) P^I(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

Esta expresión se corresponde con el modelo definido en [25], [29, sección 2.2]. Cuando nos limitamos a conjuntos finitos la expresión (3.6) es equivalente a

$$\mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1=0}^m \dots \sum_{i_n=0}^m Q\left((X_1)_{\geq \alpha_{1,i_1}}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_{n,i_n}}\right) m(\alpha_{1,i_1}) \dots m(\alpha_{n,i_n}) \quad (3.7)$$

donde  $\alpha_{r,1} \geq \dots \geq \alpha_{r,m}$  denota los grados de pertenencia de los elementos de  $E$  al conjunto borroso  $X_r$ ,  $1 \leq r \leq n$ ,  $\alpha_{r,0} = 1$ ,  $\alpha_{r,m+1} = 0$ ; y  $m(\alpha_{r,j}) = \alpha_{r,j} - \alpha_{r,j+1}$ ,  $j = 0, \dots, m$ .

**Ejemplo 37** Consideremos el ejemplo 35. Los alfa-cortes para los conjuntos borrosos altos y rubios son

	$(\text{altos})_{>\alpha_1}$
$\alpha_1 \in (0, 9, 1]$	$\{e_3\}$
$\alpha_1 \in (0, 8, 0, 9]$	$\{e_2, e_3\}$
$\alpha_1 \in (0, 2, 0, 8]$	$\{e_1, e_2, e_3\}$
$\alpha_1 \in (0, 0, 2]$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

	$(\text{rubios})_{>\alpha_2}$
$\alpha_2 \in (0, 8, 1]$	$\{e_1\}$
$\alpha_2 \in (0, 3, 0, 8]$	$\{e_1, e_2\}$
$\alpha_2 \in (0, 1, 0, 3]$	$\{e_1, e_2, e_3\}$
$\alpha_2 \in (0, 0, 1]$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

<sup>1</sup>Nótese que para cuantificadores semi-borrosos unarios los modelos basados en conjuntos aleatorios de máxima dependencia e independencia coinciden.

Para evaluar el ejemplo nos ayudamos de la siguiente tabla de probabilidades cruzadas

$(\text{altos})_{\geq \alpha_1}, (\text{rubios})_{\geq \alpha_2}$	$\alpha_2 \in (0,8, 1]$	$\alpha_2 \in (0,3, 0,8]$	$\alpha_2 \in (0,1, 0,3]$	$\alpha_2 \in (0, 0,1]$
$\alpha_1 \in (0,9, 1]$	0,02 : 0	0,05 : 0	0,02 : 1	0,01 : 1
$\alpha_1 \in (0,8, 0,9]$	0,02 : 0	0,05 : 0	0,02 : 1	0,01 : 1
$\alpha_1 \in (0,2, 0,8]$	0,12 : 0	0,3 : 0,33	0,12 : 1	0,06 : 1
$\alpha_1 \in (0, 0,2]$	0,04 : 0	0,1 : 0	0,04 : 0,5	0,02 : 1

donde el primer elemento de cada celda representa la probabilidad de los representantes, y el segundo el valor el resultado de aplicar el cuantificador semi-borroso a dichos representantes. Y así

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2) &= 0,02 \times 0 + 0,05 \times 0 + 0,02 \times 1 + \dots + 1 \times 0,02 \\ &= 0,379 \end{aligned}$$

### 3.2.3. Otras posibilidades para definir QFMs basados en conjuntos aleatorios

Tal como se menciona en la sección 2.3.1, es posible definir otros QFMs basándonos en otras funciones de probabilidad. Una posibilidad muy evidente es realizar una interpolación entre los modelos de máxima dependencia e independencia. En este caso, la función de probabilidad es una combinación de una función de probabilidad uniforme unidimensional y una función de probabilidad uniforme  $n$ -dimensional. Sea  $\tau \in [0, 1]$  el parámetro que define la interpolación; definimos  $\mathcal{F}^\tau$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\tau(Q)(X_1, \dots, X_n) &= \tau \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &\quad + (1 - \tau) \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

En [29, pág. 108] también se ha propuesto la utilización de la función definida en la expresión 2.5 para modelar la idea de dependencia aproximada en el caso binario. Aunque la idea de modelar dependencias aproximadas entre los niveles de especificidad de los votantes mediante densidades de probabilidad es interesante, ya que puede reflejar un comportamiento más natural de los mismos, flexibilizando

sus niveles de especificidad, nos centraremos en el análisis de los QFM's  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ , dejando como línea de trabajo futuro el planteamiento y análisis de QFM's basados en la idea de dependencia aproximada.

### 3.3. Análisis de los QFM's $\mathcal{F}^A$ , $\mathcal{F}^{MD}$ y $\mathcal{F}^I$

En las dos siguientes secciones analizamos los QFM's  $\mathcal{F}^A$ ,  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ . En primer lugar analizaremos el modelo  $\mathcal{F}^A$  y en segundo los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ . Hemos considerado conjuntamente el análisis de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  porque estos modelos comparten la interpretación de los conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios. Además, en el análisis de los modelos, presentamos algunos ejemplos de aplicación que hemos considerado muy interesantes.

#### 3.3.1. Análisis del QFM $\mathcal{F}^A$

El QFM  $\mathcal{F}^A$  cumple el marco axiomático de los DFSs lo cual garantiza el cumplimiento de todas las propiedades derivadas de éste. Además, los operadores inducidos por este modelo (véase el lema 1) son la tnorma producto y la tconorma suma probabilística, por lo que es inherentemente diferente de los DFSs estándar<sup>2</sup> definidos en [41, 45, 47, 50].

El QFM  $\mathcal{F}^A$  es hasta nuestro conocimiento el único DFS no estándar que se conoce. Por otra parte, las propiedades no derivadas del marco axiomático de los DFS que verifica este modelo le garantizan un comportamiento excelente, bajo nuestro punto de vista mejor que el de los modelos propuestos en [41, 45, 47, 50] (véase la sección 1.5.7 en la cual analizamos estas propuestas). Como contrapartida, el QFM  $\mathcal{F}^A$  está limitado a referenciales de cardinalidad finita. No obstante, para la mayoría de las aplicaciones, el tratamiento de referenciales finitos es más que suficiente.

De entre las propiedades no derivadas del marco axiomático de los DFSs que hemos considerado más interesantes, el modelo  $\mathcal{F}^A$  cumple las propiedades de continuidad, de inserción de argumentos borrosa, de media para el cuantificador identidad, y de interpretación probabilística de los cuantificadores.

---

<sup>2</sup>Recordemos que los DFSs estándar son los que inducen la tnorma mínimo y la tconorma máximo.

El QFM  $\mathcal{F}^A$  no cumple la propiedad de conservatividad, que no es verificada por ningún DFS. Tampoco cumple la propiedad de propagación de la borrosidad, lo cual es lógico ya que ésta es violada por los propios operadores inducidos (véase el contraejemplo planteado en el apartado A.2.2). Como hemos explicado en el apartado 1.4.2, las consecuencias del cumplimiento de la propiedad de propagación de la borrosidad pueden ser muy negativas para muchas aplicaciones, por lo que realmente consideramos su no cumplimiento una ventaja.

También es muy destacable que al cumplirse la propiedad de inserción de argumentos borrosa el QFM  $\mathcal{F}^A$  es un DFS candidato para el modelado de la *cuantificación anidada* (véase la sección 4.6). En [47, pág. 369] se establece que para que un DFS pueda modelar adecuadamente la cuantificación anidada es necesario que se verifique la propiedad de inserción de argumentos borrosa. La suficiencia de la condición todavía no ha sido demostrada. En este momento aún no hemos podido profundizar en este aspecto.

Un resultado que nos parece realmente interesante pero que todavía no hemos sido capaces de demostrar es el siguiente:

**Hipótesis 38** *Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario cuantitativo definido mediante un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  continuo; esto es,*

$$Q(Y) = fn\left(\frac{|Y|}{|E|}\right)$$

*para  $Y \in \mathcal{P}(E)$ . Entonces cuando el tamaño del referencial tiende a infinito  $\mathcal{F}^A(Q)(X)$  tiende al valor del número borroso  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  en la media de los grados de pertenencia; es decir,*

$$\lim_{|E| \rightarrow \infty} \mathcal{F}^A(Q)(X) = fn\left(\frac{\sum_{e \in E} \mu_X(e)}{|E|}\right)$$

*para  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .*

Es decir, si la hipótesis presentada es correcta, el comportamiento asintótico del modelo  $\mathcal{F}^A$  es el método de Zadeh. En este momento no disponemos de ninguna prueba de este resultado, pero experimentos por ordenador parecen indicar el cumplimiento del mismo<sup>3</sup>. El cumplimiento de esta propiedad permitiría la aproximación de este modelo en tiempo lineal para un conjunto referencial suficientemente grande.

<sup>3</sup>Además, para cuantificadores binarios proporcionales el resultado también parece cumplirse cuando se modela la intersección de los conjuntos borrosos con la tnorma producto.

	$\mathcal{F}^A$
<b>Marco Axiomático de los DFSs</b>	
(Z-1) Generalización correcta	Sí
(Z-2) Cuantificadores de proyección	Sí
(Z-3) Dualidad	Sí
(Z-4) Uniones e intersecciones	Sí
(Z-5) Preservación de la monotonía	Sí
(Z-6) Aplicación funcional	Sí
<b>Propiedades adicionales</b>	
(PA-1) Inserción de argumentos borrosa	Sí
(PA-2) Continuidad en los argumentos	Sí
(PA-3) Continuidad en el cuantificador	Sí
(PA-4) Conservatividad	No
(PA-5) Propagación de la borrosidad	No
<b>Propiedades de los métodos probabilísticos</b>	
(PP-1) Media para el cuantificador identidad	Sí
(PP-2) Interpretación probabilística de los cuantificadores	Sí

**Tabla 3.1:** Tabla de cumplimiento de las propiedades del modelo  $\mathcal{F}^A$ .

En la tabla 3.1 resumimos el análisis de propiedades del QFM  $\mathcal{F}^A$ , que se realiza en el apéndice A.1.

Desde el punto de vista práctico, los resultados que hemos obtenido con el QFM  $\mathcal{F}^A$  en la experimentación llevada a cabo en recuperación de información (capítulo 5) han sido superiores a los del resto de los modelos analizados. De esta manera demostramos que además de su buen comportamiento teórico, el QFM  $\mathcal{F}^A$  es útil en entornos reales.

Para finalizar vamos a plantear un ejemplo que demuestra el interés de la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores (véase la sección 1.4.2):

**Ejemplo 39** Consideremos la evaluación de la siguiente sentencia cuantificada

*“Q estudiantes altos son rubios”*

donde  $Q$  puede representar “alrededor del 20 % o menos”, “alrededor del 50 %”, o “alrededor del 80 % o más”. La definición de los conjuntos borrosos  $\mathbf{altos} \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  y  $\mathbf{rubios} \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  es:

$$\mathbf{altos} = \{0,8/e_1, 0,9/e_2, 1/e_3, 0,2/e_4\}, \mathbf{rubios} = \{1/e_1, 0,8/e_2, 0,3/e_3, 0,1/e_4\}$$

y la de los cuantificadores semi-borrosos asociados a las expresiones anteriores es:

$$\begin{aligned} \mathbf{alrededor\_del\_20\%o\_menos}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} T_{-\infty,0,0,2,0,4} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ \frac{1}{3} & Y_1 = \emptyset \end{cases} \\ \mathbf{alrededor\_del\_50\%}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} T_{0,2,0,4,0,6,0,8} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ \frac{1}{3} & Y_1 = \emptyset \end{cases} \\ \mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_más}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} T_{0,6,0,8,1,\infty} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ \frac{1}{3} & Y_1 = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

Los números borrosos  $T_{-\infty,0,0,2,0,4}(x)$ ,  $T_{0,2,0,4,0,6,0,8}(x)$  y  $T_{0,6,0,8,1,\infty}(x)$  se representan en la figura 3.2. Nótese que los cuantificadores semi-borrosos que se acaban de definir forman un recubrimiento probabilístico del universo de cuantificación ya que

$$\begin{aligned} &\mathbf{alrededor\_del\_20\%o\_menos}(Y_1, Y_2) \\ &+ \mathbf{alrededor\_del\_50\%}(Y_1, Y_2) \\ &+ \mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_más}(Y_1, Y_2) = 1 \end{aligned}$$

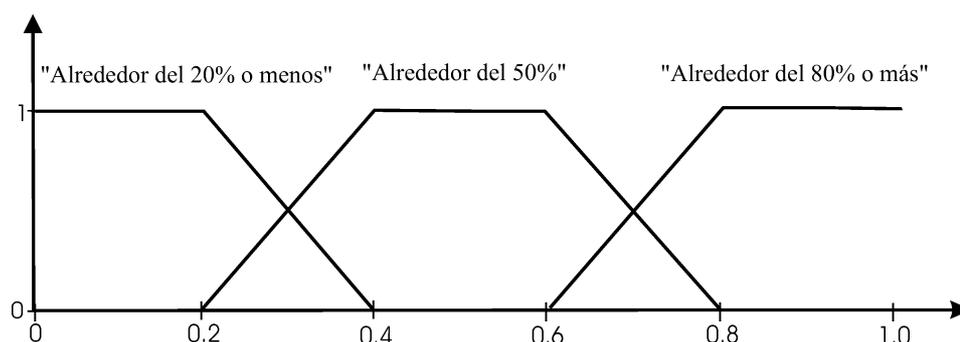
para cualquier par  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ . Evaluando la expresión para los distintos cuantificadores obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{alrededor\_del\_20\%o\_menos})(\mathbf{altos}, \mathbf{rubios}) &= 0,089 \\ \mathcal{F}(\mathbf{alrededor\_del\_50\%})(\mathbf{altos}, \mathbf{rubios}) &= 0,555 \\ \mathcal{F}(\mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_más})(\mathbf{altos}, \mathbf{rubios}) &= 0,356 \end{aligned}$$

Nótese que  $0,089 + 0,555 + 0,356 = 1$ . Así, podemos interpretar que

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{alrededor\_del\_20\%o\_menos}) &= 0,089 \\ \Pr(\mathbf{alrededor\_del\_50\%}) &= 0,555 \\ \Pr(\mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_más}) &= 0,356 \end{aligned}$$

Es decir, interpretamos la evaluación de la expresión cuantificada como una distribución de probabilidad sobre las etiquetas. Bajo la perspectiva del experimento



**Figura 3.2:** Números borrosos asociados a los cuantificadores del ejemplo 39.

aleatorio subyacente, se interpreta que un 8,9% de los votantes consideran que el cuantificador “*alrededor del 20% o menos*” es el más adecuado para describir el significado de “*Q estudiantes altos son rubios*”, que el 55,5% consideran que el cuantificador más adecuado es “*alrededor del 50%*”, y que el 35,6% considera que el cuantificador más adecuado es “*alrededor del 80% o más*”.

En el caso de que el conjunto  $\mathbf{altos} \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  fuese vacío el resultado sería

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{alrededor\_del\_20\%o\_menos}) &= \frac{1}{3} \\ \Pr(\mathbf{alrededor\_del\_50\%}) &= \frac{1}{3} \\ \Pr(\mathbf{alrededor\_del\_80\%o\_más}) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De esta manera consideramos la aplicación de cualquier cuantificador igualmente adecuada.

Nótese que el esquema desarrollado en este ejemplo nos permite compactar de una manera muy adecuada la información asociada a las expresiones cuantificadas, lo cual es de utilidad evidente en ámbitos como las bases de datos o la minería de datos. Piénsese que las bases de datos actuales almacenan cantidades enormes de información, por lo que la representación de la misma como una distribución de probabilidad similar a la planteada en el ejemplo puede suponer una reducción de varios órdenes de magnitud. Además, la representación de la información como una distribución de probabilidad sobre cuantificadores es mucho más apta para el consumo humano que la información cruda de las bases de datos. Uno de los objetivos de la minería de datos es la extracción de información útil y comprensible de los sistemas de bases de datos actuales, por lo que la técnica que hemos presentado en

el ejemplo anterior resulta muy prometedora para este campo.

### 3.3.2. Análisis de los QFMs $\mathcal{F}^{MD}$ y $\mathcal{F}^I$

Los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  no cumplen el marco axiomático de los DFS. No obstante estos modelos tienen un comportamiento muy adecuado ya que cumplen la mayoría de las propiedades que se derivan del mismo. Es cierto que los axiomas que definen los DFSs son requerimientos muy razonables, y que las propiedades que se derivan de ellos son de gran interés. Pero como hemos visto en 1.5.7 hay aplicaciones para las cuales la axiomática de los DFS puede ser demasiado rígida<sup>4</sup>. Para más información véase el análisis de dichos modelos realizado en la sección 1.5.7.

Por otra parte nos parece importante destacar la interpretación probabilística de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ . Creemos que ésta puede ser ventajosa en ciertas aplicaciones, ya que permite la combinación de estos modelos con otras técnicas probabilísticas. Al final de esta sección mostramos como la interpretación subyacente de estos modelos, basada en conjuntos aleatorios, nos permite aplicarlos directamente sobre la distribución de probabilidad que describe una población.

En la tabla 3.2 resumimos el análisis de propiedades de los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  que se realiza en los apéndices A.2 y A.3 respectivamente.

De entre las propiedades más importantes derivadas del marco axiomático, el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  no cumple la propiedad de negación interna y, como consecuencia del fallo de esta última, tampoco la de dualidad. Tampoco cumple la propiedad de coherencia con la lógica en el caso binario.

Cuando consideramos las propiedades adicionales no derivadas del marco axiomático de los DFS, el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  no cumple la propiedad de inserción de argumentos borrosa ni tampoco la de propagación de la borrosidad. Sobre las consecuencias negativas del cumplimiento de la propiedad de propagación de la borrosidad ya hemos debatido en el análisis del modelo  $\mathcal{F}^A$  y en la sección 1.4.2. Por su parte, la propiedad de inserción borrosa de argumentos es un requerimiento muy exigente, ya que los únicos DFSs conocidos que cumplen la misma son los modelos  $\mathcal{M}_{CX}$  [47] y  $\mathcal{F}^A$ .

<sup>4</sup>En la sección 1.5.7 hemos visto que los modelos paradigmáticos de DFSs estándar  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_{CX}$  y  $\mathcal{F}_{Ch}$  [47, capítulo 11], [44], todos ellos de comportamiento teórico excelente, son incapaces de distinguir situaciones que intuitivamente no deberían ofrecer ninguna duda. Los ejemplos mostrados en dicha sección demuestran que para muchas aplicaciones estos modelos no son adecuados.

La propiedad de continuidad en los argumentos se cumple en el caso finito. En el caso infinito los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  pueden estar indefinidos para algunos cuantificadores, tal como se expuso a lo largo de este capítulo. Como ya hemos mencionado, en esta memoria no hemos estudiado el problema de la cuantificación infinita. Sobre este hecho nos parece importante señalar que el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  trivialmente viola la propiedad de continuidad en el caso infinito<sup>5</sup>. No obstante, creemos que ambos modelos son continuos en el caso infinito para cuantificadores definidos por medio de números borroso continuos. Abordaremos el estudio de la cuantificación sobre dominios infinitos como trabajo futuro.

Un punto que nos parece muy destacable es que el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  cumple la propiedad de conservatividad. La propiedad de conservatividad es un requerimiento muy intuitivo pero que entra en contradicción con la axiomática que define los DFSs. Por lo tanto, ninguno de los modelos definidos en [47] ni tampoco el QFM  $\mathcal{F}^A$  pueden verificarla. El modelo  $\mathcal{F}^I$  tampoco verifica esta propiedad.

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  también verifica la propiedad de media para el cuantificador identidad y la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores.

Por su parte, el modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica las propiedades de negación interna y dualidad en el caso finito aunque no en el caso infinito. Como contrapartida no verifica la propiedad de uniones e intersecciones. Las operaciones inducidas por el modelo  $\mathcal{F}^I$  son distintas en función del mecanismo utilizado en su definición (véase la discusión de la propiedad de operadores inducidos en el apartado 1.4.1). En un caso se inducen la tnorma mínimo y la tconorma máximo y en el otro la tnorma producto y la tconorma suma probabilística. Si consideramos que los operadores inducidos son la tnorma mínimo y la tconorma producto la propiedad se cumple en el caso unario,

<sup>5</sup>Por ejemplo, consideremos el cuantificador semi-borroso

$$\mathbf{todos}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 0 & : Y_1 \not\subseteq Y_2 \\ 1 & : Y_1 \subseteq Y_2 \end{cases}$$

y los conjuntos borrosos  $X_1, X_2 \in \mathcal{P}([0, 1])$  definidos como  $\mu_{X_1}(x) = \mu_{X_2}(x) = x$  se cumple que

$$\int_0^1 \mathbf{todos}((X_1)_{\geq \alpha}, (X_2)_{\geq \alpha}) d\alpha = 1$$

pero si hacemos  $\mu_{X_2}(x) = x - \delta$  con  $\delta > 0$  entonces

$$\int_0^1 \mathbf{todos}((X_1)_{\geq \alpha}, (X_2)_{\geq \alpha}) d\alpha = 0$$

al coincidir los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  para cuantificadores unarios.

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de inserción de argumentos borrosa pero no las propiedades de propagación de la borrosidad y conservatividad. El modelo  $\mathcal{F}^I$  también verifica la propiedad de media para el cuantificador identidad y la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores.

Los resultados que hemos obtenido con los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  en la experimentación llevada a cabo en recuperación de información han sido ligeramente inferiores a los del QFM  $\mathcal{F}^A$ . Remitimos al lector al capítulo 5 para más información acerca de la investigación llevada a cabo.

Para finalizar, mostramos un ejemplo que demuestra cómo se puede utilizar la interpretación subyacente a los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  en combinación con una densidad de probabilidad que representa una característica de una cierta población:

**Ejemplo 40** Sea  $\text{alto} : \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{I}$  la etiqueta lingüística definida como

$$\text{alto}(x) = T_{180,190,\infty,\infty}(x), x \in \mathbb{R}$$

Y consideremos que la altura de una cierta población se puede representar mediante una distribución normal  $N(\mu, \sigma)$ .  $\text{alto}_{\geq \alpha} = [h, \infty)$  representa el conjunto de alturas consideradas altas para el nivel de especificidad  $\alpha$ . Por lo tanto

$$\int_{\text{alto}_{\geq \alpha}} N(\mu, \sigma) = \int_h^{\infty} N(\mu, \sigma) dh$$

es la probabilidad de que un individuo sea considerado alto, o lo que es lo mismo, la proporción de individuos altos de la población para el nivel de especificidad  $\alpha$ . En la figura 3.3 se representa la etiqueta alto junto a una distribución normal  $N(185, 1)$  (los parámetros que definen la distribución se han escogido de manera que la figura resulte explicativa). En esta figura se ha rellenado la región de probabilidad asociada al alfa-corte de nivel 0,6 de la etiqueta alto.

Consideremos el cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

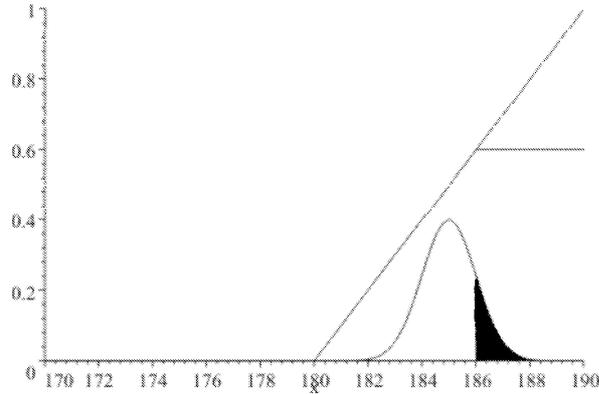
$$Q(Y) = S_{0,6,0,8} \left( \frac{|Y|}{|E|} \right)$$

donde suponemos que  $E$  es el referencial de individuos de la población en estudio. Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  el conjunto borroso que representa los individuos altos de dicha población; esto es,

$$\mu_X(e) = \mu_{\text{alto}}(\text{altura}(e))$$

	$\mathcal{F}^{MD}$	$\mathcal{F}^I$
<b>Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFSs</b>		
(PZ-1) Generalización correcta	Sí	Sí
(PZ-2) Cuantitatividad	Sí	Sí
(PZ-3) Valor de verdad inducido	Sí	Sí
(PZ-4) Funciones de verdad inducidas	Sí	Sí
(PZ-5) Trasposición de argumentos	Sí	Sí
(PZ-6) Negación externa	Sí	Sí
(PZ-7) Negación interna	No	Caso finito
(PZ-8) Dualidad	No	Caso finito
(PZ-9) Uniones e intersecciones	Sí	No
(PZ-10) Monotonía en los argumentos	Sí	Sí
(PZ-11) Monotonía en los cuantificadores	Sí	Sí
(PZ-12) Coherencia con los cuantificadores estándar	Caso unario	No
(PZ-13) Inserción de argumentos nítida	Sí	Sí
(PZ-14) Aplicación funcional	Caso finito	Caso finito
<b>Propiedades adicionales</b>		
(PA-1) Inserción de argumentos borrosa	No	Sí
(PA-2) Continuidad en los argumentos	Caso finito	Caso finito
(PA-3) Continuidad en el cuantificador	Sí	Sí
(PA-4) Conservatividad	Sí	No
(PA-5) Propagación de la borrosidad	No	No
<b>Propiedades de los métodos probabilísticos</b>		
(PP-1) Media para el cuantificador identidad	Sí	Sí
(PP-2) Interpretación probabilística de los cuantificadores	Sí	Sí

**Tabla 3.2:** Tabla de cumplimiento de las propiedades para los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ .



**Figura 3.3:** Probabilidad de que un individuo sea considerado “alto” para el nivel de especificidad  $\alpha = 0,6$ .

donde altura :  $E \rightarrow \mathbb{R}$  representa la altura de los individuos. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(Q)(X) &= \int_0^1 Q(X_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &\approx \int_0^1 S_{0,6,0,8} \left( \int_{\text{alto}_{\geq \alpha}} N(\mu, \sigma) \right) d\alpha \end{aligned}$$

ya que la proporción de individuos altos para un nivel de especificidad  $\alpha$  ( $\frac{|X_{\geq \alpha}|}{|E|}$ ) puede ser aproximada por la probabilidad asociada a dicho alfa-corte en la distribución normal.

Nótese que la técnica que hemos planteado en el ejemplo anterior nos permite evaluar una expresión cuantificada sin conocer exactamente el conjunto borroso al cual se aplica. El conocimiento de la función de probabilidad que sigue la población nos ha sido suficiente.

### 3.4. Tratamiento alternativo de las situaciones de indeterminación

Aunque los cuantificadores semi-borrosos son un medio de especificación excelente para las expresiones cuantificadas, hay situaciones en las que no resulta nada evidente el grado de verdad que debe asignarse a ciertas relaciones entre conjuntos.

Consideremos por ejemplo el cuantificador semi-borroso **casi.todos** : $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

$$\mathbf{casi.todos}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} S_{0,6,0,8} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

La asignación del grado de verdad 1 a la situación en que  $Y_1 = \emptyset$  es razonable si nos interesa mantener cierta coherencia con el cuantificador **todos** : $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  (véase la sección 4.1), pero no siempre tiene porqué ser adecuada. Por ejemplo, en la sección 3.3.1 se presentó un ejemplo (ejemplo 39) en el que la asignación más apropiada para la situación de indeterminación es  $\frac{1}{3}$ .

En la bibliografía el tratamiento de la situación en que la que la cardinalidad relativa está indefinida es bastante problemática. En la revisión bibliográfica (sección 1.5) se puede comprobar que muchas de las aproximaciones que siguen el marco de Zadeh simplemente ignoran el problema, estando los modelos indefinidos en esta situación. Otros autores [47] muestran bastante coherencia y asocian normalmente el valor de verdad 1 al caso de indeterminación de la cardinalidad relativa, aunque en algún caso [48, pág. 6] se asigna a esta situación el valor  $\frac{1}{2}$ .

El problema no se limita solamente a los cuantificadores binarios proporcionales. Por ejemplo en la sección 4.5 se propone el cuantificador semi-borroso cuaternario

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \begin{cases} fn \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} \right) & \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} \neq 0 \\ fn(\infty) & \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \neq 0 \wedge \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} = 0 \\ fn(1) & \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} = 0 \wedge \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} = 0 \\ v \in [0, 1] & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $fn : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$  es un número borroso. Este cuantificador semi-borroso modela la semántica de expresiones del tipo “*la proporción de mujeres que están caminando es el doble de la proporción de hombres que están corriendo*”. El valor arbitrario  $v \in [0, 1]$  se asocia a todas aquellas situaciones en las que la cardinalidad relativa está indefinida, y no está claro cual es la asignación más adecuada.

Pero existen ejemplos en las que la asignación de un grado de verdad apropiado es todavía más difícil. Consideremos los siguientes cuantificadores semi-borrosos (véase [47, pág. 61]) asociados a la semántica de determinantes definidos (artículos

o demostrativos):

$$\begin{aligned} \mathbf{el}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 1 & : |Y_1| = 1 \wedge Y_1 \subseteq Y_2 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases} \\ \mathbf{los}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 1 & : |Y_1| > 1 \wedge Y_1 \subseteq Y_2 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las definiciones anteriores no siempre se aceptan en la bibliografía lingüística, considerándose que en algunos casos la cuantificación debe quedar indefinida [40, pág. 231]. Por ejemplo, la expresión “*el rey de Francia es calvo*” actualmente carece de significado ya que Francia no tiene rey. En muchas ocasiones en la propia bibliografía lingüística se sugiere la utilización de una lógica trivaluada para manejar estas situaciones. Nótese que según la expresión 3.8  $\mathbf{el}(\emptyset, \mathbf{calvos}) = 0$ .

En sus trabajos Glöckner considera que la aproximación trivaluada encaja fácilmente en el marco basado en cuantificadores semi-borrosos. En [47, sección 2.9] sugiere modelar las situaciones indefinidas utilizando el valor de verdad intermedio  $\frac{1}{2}$ :

$$\mathbf{el}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 1 & : |Y_1| = 1 \wedge Y_1 \subseteq Y_2 \\ 0 & : |Y_1| = 1 \wedge Y_1 \not\subseteq Y_2 \\ \frac{1}{2} & : |Y_1| \neq 1 \end{cases}$$

No obstante, nuestra interpretación es que si queremos modelar adecuadamente estos casos esto no es lo más adecuado. Habitualmente desde el punto de vista de la lógica borrosa el valor  $\frac{1}{2}$  indica un “cumplimiento medio de una propiedad” (interpretación de la sentencia “*el rey de Francia es medianamente alto*” suponiendo la existencia del rey de Francia) lo cual resulta distinto de decir que una expresión carece de sentido, o que un cuantificador no es aplicable (interpretación de la sentencia “*el rey de Francia es calvo*” si no existe rey de Francia). Tal como hemos planteado en [28] una posibilidad muy razonable es modelar las situaciones de no aplicabilidad o de indeterminación mediante un valor de verdad especial  $\theta$ . De esta manera el conjunto imagen pasa a ser  $[0, 1] \cup \{\theta\}$  con  $\theta \notin [0, 1]$ . Esto nos permite evitar que los valores de verdad intermedios se confundan con las situaciones de indeterminación o no aplicabilidad.

La incorporación de la situación de indeterminación en los modelos que se plantean en esta memoria es bastante sencilla. Para ello asignaremos la probabilidad asociada a las situaciones de indeterminación o de no aplicabilidad directamente a

$\theta$ . En el resto de las situaciones operaremos de la manera habitual. Si la probabilidad final asignada a  $\theta$  es  $p$  entonces consideraremos que el resultado de evaluar una expresión es “no aplicable” con probabilidad  $p$  y el valor de verdad resultante de no considerar la indeterminación con probabilidad  $1 - p$ . Consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 41** Sea **casi.todos** : $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  el cuantificador semi-borroso definido como

$$\mathbf{casi.todos}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} S_{0,6,0,8} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ \theta & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

Y  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  los siguientes conjuntos borrosos

$$X_1 = \{0,8/e_1, 0,8/e_2, 0,8/e_3\}$$

$$X_2 = \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3\}$$

Entonces

$$\mathcal{F}^{MD}(X_1, X_2) = \theta \text{ con probabilidad } 0,2$$

$$\mathcal{F}^{MD}(X_1, X_2) = 1 \text{ con probabilidad } 0,8$$

De esta manera podemos distinguir, de una manera sencilla, aquellas situaciones en las que el significado del cuantificador carece de sentido o las proporciones están indeterminadas. La decisión de cómo trabajar con la probabilidad asignada a  $\theta$  pasa a ser dependiente de la aplicación o del problema que queremos resolver. Lo importante, desde nuestro punto de vista, es que de esta manera podemos identificar claramente estas situaciones, evitando mezclar los casos en los que una propiedad se cumple en grado medio y los casos en los que el significado de una expresión carece de sentido.

En este capítulo hemos definido tres QFMs basados en las interpretaciones probabilísticas de los conjuntos borrosos que hemos explicado en el capítulo 3. El primer QFM que proponemos, el modelo  $\mathcal{F}^A$ , sigue la interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosimilitudes. Los otros dos QFMs, los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ , siguen la

interpretación de conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios y se enmarcan dentro de un marco probabilístico que nos permite definir otros modelos<sup>6</sup>.

El QFM  $\mathcal{F}^A$  es hasta nuestro conocimiento el único DFS no estándar que se conoce. Además, las propiedades a mayores del marco axiomático de los DFS que verifica este modelo le garantizan un comportamiento excelente, bajo nuestro punto de vista mejor que el de los modelos propuestos en [47]. Como contrapartida, el QFM  $\mathcal{F}^A$  está limitado a referenciales de cardinalidad finita.

Por su parte, aunque los QMFs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  no cumplen el marco axiomático de los DFSs, su comportamiento teórico sigue siendo muy bueno. Además, estos QMFs tienen una interpretación subyacente que quizás sea algo más natural que la del QFM  $\mathcal{F}^A$ . También es destacable que los QMFs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  no están limitados a conjuntos finitos.

No creemos que el no cumplimiento del marco axiomático de los DFSs por parte de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  sea una desventaja demasiado importante con respecto a aquellos. Por una parte creemos que la interpretación probabilística puede ser muy útil a la hora de combinar la cuantificación borrosa con otras aproximaciones basadas en probabilidades. Por otra, hemos visto en la sección 1.5.7 que los modelos que verifican el marco axiomático de los DFSs tampoco están exentos de problemas. Los DFSs estándar que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad (por ejemplo, los modelos de comportamiento teórico excelente  $\mathcal{M}_{CX}$  y  $\mathcal{M}$ ) no son válidos para muchas aplicaciones (véase la sección 1.5.7 para más detalles). Con respecto a los DFSs estándar que no cumplen esta propiedad nos parece importante señalar que el rendimiento de los QMFs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  en los experimentos de recuperación de información realizados con cuantificadores binarios (capítulo 5) ha sido muy superior al del modelo  $\mathcal{F}^{Ch}$  [47, pág. 230], ejemplo paradigmático de “modelo útil” que no propaga la borrosidad.

Otro punto a favor de los modelos que hemos planteado en esta memoria es que su interpretación probabilística subyacente nos permite un tratamiento alternativo muy natural de las situaciones de indeterminación o no aplicabilidad.

---

<sup>6</sup>Recordamos al lector que el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  es una variación del modelo planteado en [80, sección 3.3.2. y sección 3.4.1.], [22, pág. 37]. En la “reescritura” de este modelo lo hemos adaptado al marco de trabajo basado en cuantificadores semi-borrosos, eliminando además la normalización planteada por los autores. Para más información véase la revisión de este modelo que hemos realizado en la sección 1.5.6.

Para finalizar, recordemos que en el capítulo anterior hemos indicado que la interpretación probabilística de los conjuntos borrosos parece exigir distintos operadores en función de los términos lingüísticos que manejemos. Por ejemplo, la sentencia “Juan es alto o no alto” es tautológica, aunque el valor de pertenencia de Juan a los conjuntos “alto” y “no alto” pueda ser menor que 1 (véase el ejemplo 30). Aunque en la definición de los modelos que hemos hecho en esta memoria no hemos incidido en estas cuestiones, en [27] hemos planteado una aproximación preliminar para solucionar este problema definiendo los modelos de cuantificación directamente sobre las *fórmulas lingüísticas* (e.g., “alto o no alto”) en lugar de sobre los conjuntos borrosos derivados de la aplicación de las etiquetas a los elementos del universo.

En la definición de los modelos que planteamos en esta memoria no hemos tenido en cuenta este problema. No obstante, consideramos que su comportamiento es muy adecuado ya que además de estar avalados por su interpretación semántica tienen un comportamiento teórico muy bueno. Además, estos modelos son muy intuitivos y fáciles de manipular algebraicamente. La aproximación planteada en [27] obliga a realizar algunas suposiciones muy difíciles de justificar, y complica enormemente la definición de los modelos. En todo caso, este es un problema sobre el que seguiremos profundizando en el futuro.

En el siguiente capítulo abordamos un problema distinto. Una vez hemos determinado algunos modelos de buen comportamiento, vamos a analizar qué expresiones cuantificadas nos pueden ser más útiles. Para ello vamos a plantear una clasificación de cuantificadores semi-borrosos en la que hemos pretendido recoger aquellos que nos han parecido más interesantes tanto desde el punto de vista de su expresividad como desde el punto de vista de su utilidad para las aplicaciones. Los ejemplos que mostraremos a lo largo de este capítulo demostrarán la utilidad de esta clasificación en muy diversos ámbitos.

# Capítulo 4

## Clasificación de cuantificadores semi-borrosos

En este capítulo vamos a presentar una clasificación de cuantificadores semi-borrosos que permite la evaluación de una relación muy exhaustiva de sentencias cuantificadas borrosas que ilustrará la gran potencia expresiva de este tipo de operadores. Esta relación se presenta agrupada, constituyendo una clasificación que supone un incremento de poder expresivo muy importante con respecto a la dicotomía absoluto/relativa habitual.

La diversidad de expresiones que vamos a manejar en esta clasificación es de mucho interés para las aplicaciones. En particular, en ámbitos como la recuperación de información o las bases de datos ya se ha propuesto la utilización de cuantificación borrosa para aumentar la potencia de los lenguajes de consulta [9, 10, 13, 14]. No obstante, las propuestas suelen estar limitadas a la inclusión de cuantificadores absolutos y proporcionales y están muy lejos de manejar la diversidad de expresiones que permite la clasificación que vamos a desarrollar en este capítulo. Además, la clasificación también es de interés obvio para el desarrollo de *la computación con palabras* [104].

La clasificación se centra en los cuantificadores que aparecen más explícitamente en lenguaje natural (los que denotan la semántica de los determinantes) pero contempla también otros tipos de cuantificadores. En concreto, el grupo de *cuantificadores de similitud* (e.g, “*el conjunto  $Y_1$  es aproximadamente igual al conjunto  $Y_2$* ”) no se contempla en TGQ pero es de tremendo interés ya que generaliza al-

gunos índices estadísticos que son muy útiles para la medición de correlaciones y similitudes.

El mayor énfasis de la clasificación se ha hecho en los cuantificadores cuantitativos, pero también se han realizado algunas consideraciones acerca de la cuantificación no cuantitativa.

Se incluye también una sección en la que se plantea la evaluación de expresiones en las que intervienen varios cuantificadores (e.g. *“la mayoría de los alumnos han suspendido el doble de asignaturas teóricas que prácticas”*). Aunque un poco ajena a la clasificación en sí, esta sección es muy interesante, ya que el tipo de expresiones que se manejan son muy habituales y de mucha utilidad para el aumento de la expresividad de los lenguajes de consulta.

Por último, hemos incluido un apartado en el que se muestra la aplicabilidad de la clasificación en el dominio temporal. En este caso, se explica como utilizar cuantificación borrosa para el modelado de algunas expresiones muy interesantes sobre conjuntos borrosos definidos en el dominio del tiempo. Sobre este punto, nos parece destacable la naturalidad con la que la cuantificación borrosa permite expresar el cumplimiento de condiciones en el dominio temporal (e.g. *“las temperaturas altas y los valores de presión altos o medios estuvieron muy asociados a lo largo del verano”*), difícilmente planteables mediante otros tipos de análisis.

La clasificación de cuantificadores semi-borrosos que se plantea en este capítulo amplía la presentada en [24]. Hemos intentado unificar las definiciones con las que se plantean en [47], ya que consideramos que el manejo de una notación unificada en el campo de la cuantificación borrosa, al igual que en cualquier otro, es muy importante al facilitar la comparación de las propuestas de distintos autores. En todo caso, siempre que hemos utilizado alguna definición planteada en [47], la hemos referenciado adecuadamente.

En el desarrollo del capítulo se ha utilizado la siguiente notación:

$$Q_{E,a,type}^{fn} \quad \text{or} \quad Q_{E,a,type}^{fn,v} \quad (4.1)$$

para indicar, de manera parametrizada, como se pueden definir los distintos tipos de cuantificadores semi-borrosos. En la misma,  $fn$  es un número borroso sobre  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $[0, 1]$  o  $\mathbb{R}$ ;  $v \in [0, 1]$  es un parámetro que se utiliza para indicar el valor que debe tomar el cuantificador en las situaciones de indefinición;  $E$  es el universo de referencia;  $a \in \mathbb{N}$  indica la aridad del cuantificador semi-borroso; y  $type$  es un parámetro que nos

permite distinguir las distintas formas de construir los cuantificadores. Por ejemplo, por  $Q_{E,2,prop}^{S_{0,5,0,8},1}$  denotaremos un cuantificador binario proporcional (tipo *prop*), definido utilizando una función  $S$  de Zadeh de parámetros 0,5, 0,8 ( $S_{0,5,0,8}$ ), y que toma valor 1 en el caso de indeterminación de la cardinalidad relativa.

La clasificación se ha organizado en función de la aridad de los cuantificadores (unarios, binarios, ternarios, etc.). No obstante se ha distinguido un grupo especial, el grupo de *cuantificadores estándar*, por su papel destacado en el desarrollo de la cuantificación lógica.

## 4.1. Cuantificadores estándar

Hemos decidido denominar *cuantificadores estándar* a los cuantificadores que se derivan de los cuantificadores existencial y universal mediante las relaciones de negación externa e interna, tanto en el caso unario como en el binario. La denominación *estándar* para estos cuantificadores se utiliza en [47, pág. 282].

Los cuantificadores estándar son los siguientes:

$$\begin{aligned} \exists(Y) &= \begin{cases} 0 & : Y = \emptyset \\ 1 & : Y \neq \emptyset \end{cases} \\ \forall(Y) &= \begin{cases} 0 & : Y \neq E \\ 1 & : Y = E \end{cases} \\ \sim\exists(Y) &= \begin{cases} 0 & : Y \neq \emptyset \\ 1 & : Y = \emptyset \end{cases} = \forall(Y) \sim \\ \sim\forall(Y) &= \begin{cases} 0 & : Y = E \\ 1 & : Y \neq E \end{cases} = \exists(Y) \sim \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{algún}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \\ 1 & : Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \end{cases} \\
\mathbf{todos}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \not\subseteq Y_2 \\ 1 & : Y_1 \subseteq Y_2 \end{cases} \\
\mathbf{ningún}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \\ 1 & : Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \end{cases} = \mathbf{todos}(Y_1, Y_2) \tilde{\neg} \\
\mathbf{no todos}(Y_1, Y_2) &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \subseteq Y_2 \\ 1 & : Y_1 \not\subseteq Y_2 \end{cases} = \mathbf{algún}(Y_1, Y_2) \tilde{\neg}
\end{aligned}$$

En la figura 1.5 se ha mostrado el cuadrado aristotélico relativo a los cuantificadores **todos**, **algún**, **ningún**, y **no todos**.

Ejemplos de sentencias que se pueden evaluar con los cuantificadores anteriores son respectivamente “*hay un estudiante*”, “*todos son estudiantes*”, “*ninguno es estudiante*” y “*no todos son estudiantes*” para el caso unario; y “*algún estudiante es español*”, “*todos los estudiantes son españoles*”, “*ningún estudiante es español*” y “*no todos los estudiantes son españoles*” en el caso binario.

Aunque estos cuantificadores son casos particulares de los tipos que se plantean en las siguientes secciones, se han definido separadamente por la relevancia que han tenido en el desarrollo de la lógica de predicados y de las teorías lingüísticas de la cuantificación. Más adelante también veremos como podemos definir los mismos siguiendo la notación parametrizada propuesta al principio del capítulo.

## 4.2. Cuantificadores semi-borrosos unarios

En lenguaje natural la cuantificación unaria no es la más frecuente<sup>1</sup>. El fenómeno de la cuantificación unaria aparece en sentencias en las que la cuantificación no está restringida a un conjunto de elementos explícitamente, como por ejemplo en las sentencias “*todo es falso*” o “*todos son estudiantes*”. Este hecho marca una diferencia importante con los cuantificadores de aridades superiores, en los que los grupos nominales restringen los elementos de interés para el cuantificador (e.g. “*todos los estudiantes son gallegos*”). No obstante la cuantificación unaria es muy útil, entre otras debido a que muchos cuantificadores de aridades superiores se pueden reducir

<sup>1</sup>La cuantificación unaria es cuantificación de tipo  $\langle 1 \rangle$ .

de una manera sencilla a cuantificadores unarios.

En lógica de primer orden sólo se consideran dos tipos básicos de cuantificadores: el cuantificador universal  $\forall$  y el existencial  $\exists$ . Estos cuantificadores son inherentemente unarios, por lo que la lógica de primer orden sólo permite expresar algunos tipos de cuantificadores unarios, y cuantificadores que son, de alguna manera, reducibles al caso unario. Por ejemplo, las siguientes expresiones nos permiten especificar los cuantificadores asociados a las semánticas “*al menos dos*” y “*todos menos dos*” (y por extensión “*al menos n*” y “*todos menos n*”) utilizando lógica de predicados:

$$\begin{aligned} \mathbf{al\_menos\_2}(Y) &= \exists e_1 \exists e_2 (\chi_Y(e_1) \wedge \chi_Y(e_2) \wedge e_1 \neq e_2) \\ \mathbf{todos\_menos\_2}(Y) &= \exists e_1 \exists e_2 \left( \begin{array}{l} (\neg \chi_Y(e_1) \wedge \neg \chi_Y(e_2) \wedge e_1 \neq e_2) \wedge \\ \wedge \forall e_3 (\neg \chi_Y(e_3) \rightarrow e_1 = e_3 \vee e_2 = e_3) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Para expresar una sentencia en la que aparece cuantificación no unaria mediante la lógica de predicados (e.g, “*todos los hombres caminan*”) es necesario buscar la manera de “traducir” la cuantificación no unaria a una expresión válida en lógica de predicados (e.g,  $\forall x (\mathbf{hombre}(x) \rightarrow \mathbf{camina}(x))$ ). Como hemos indicado en la sección 1.2 esto normalmente no se puede conseguir. Por ejemplo, en [5, pág. 214] se demuestra que no es posible expresar el cuantificador asociado a “*la mitad o más*” en lógica de primer orden, hecho que se extiende a prácticamente la totalidad de los cuantificadores proporcionales.

En este apartado vamos a tratar los cuantificadores semi-borrosos cuantitativos unarios definidos sobre un conjunto referencial  $E$  de cardinalidad finita. Este caso es, sin duda, el más importante desde el punto de vista práctico, y constituye la generalización al caso semi-borroso de los cuantificadores expresables en lógica de predicados sobre dominios finitos.

El siguiente teorema [47, pág. 286] establece que todo cuantificador cuantitativo unario sobre un conjunto base  $E \neq \emptyset$  finito se puede expresar a partir de una función  $q : \{0, \dots, |E|\} \rightarrow \mathbf{I}$ .

**Teorema 42** [47, pág. 286] *Un cuantificador semi-borroso unario  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es cuantitativo si y sólo si existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\} \rightarrow \mathbf{I}$  tal que  $Q(Y) = q(|Y|)$ , para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$ .  $q$  se define como*

$$q(j) = Q(Y_j)$$

para  $j \in \{0, \dots, |E|\}$ , donde  $Y_j \in \mathcal{P}(E)$  es un subconjunto arbitrario de cardinalidad  $|Y_j| = j$ .

Por lo tanto, podremos definir cualquier cuantificador semi-borroso unario cuantitativo a partir de un número borroso  $fn : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$ .

En nuestra notación parametrizada vamos a considerar las siguientes posibilidades para definir cuantificadores semi-borrosos cuantitativos:

- A partir de un número borroso absoluto  $fn : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$ . Se plantean dos posibilidades:

- **Forma absoluta:**

$$Q_{E,1,card}^{fn}(Y) = fn(|Y|)$$

que se puede utilizar, por ejemplo, para evaluar expresiones del tipo “*alrededor de 5 son estudiantes*”. Si suponemos que el cuantificador asociado a “*alrededor de 5*” se especifica utilizando un número borroso trapezoidal:

$$Q_{E,1,card}^{T_{1,4,6,9}}(Y) = T_{1,4,6,9}(|Y|)$$

Entonces para el conjunto  $Y \in \mathcal{P}(E)$ :

$$Y = \{1/e_1, 1/e_2, 1/e_3, 0/e_4, \dots, 0/e_{10}\}$$

obtendremos

$$Q_{E,1,card}^{T_{1,4,6,9}}(Y) = T_{1,4,6,9}(|Y|) = T_{1,4,6,9}(3) = \frac{2}{3}$$

- **Forma absoluta de excepción:**

$$Q_{E,1,all.but.card}^{fn}(Y) = fn(|E \setminus Y|)$$

que se puede utilizar en la evaluación de expresiones similares a “*todos menos alrededor de 5 son estudiantes*”.

- A partir de un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ . Se plantean las posibilidades:

- **Forma proporcional:**

$$Q_{E,1,prop}^{fn}(Y) = fn\left(\frac{|Y|}{|E|}\right)$$

que se puede utilizar, por ejemplo, para evaluar expresiones similares a “*alrededor del 10 % son estudiantes*”.

- **Forma proporcional de excepción:**

$$Q_{E,1,all\_but\_prop}^{fn}(Y) = fn\left(\frac{|E \setminus Y|}{|E|}\right)$$

que se puede utilizar en la evaluación de la expresión “*todos menos alrededor del 10 % son estudiantes*”.

Nótese que utilizando los números borrosos:

$$fn_{\forall}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}, x \in [0, 1]$$

$$fn_{\exists}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, x \in \mathbb{N}$$

podemos definir los cuantificadores  $\exists : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$  y  $\forall : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{2}$

$$\forall_E(Y) = Q_{E,1,prop}^{fn_{all}}(Y)$$

$$\exists_E(Y) = Q_{E,1,card}^{fn_{\exists}}(Y)$$

y de manera similar se pueden definir los demás cuantificadores estándar.

En la tabla 4.1 se muestran las posibilidades para la definición de cuantificadores unarios que hemos considerado.

### 4.3. Cuantificadores semi-borrosos binarios

La cuantificación binaria es la más frecuente en el lenguaje natural y posiblemente la más interesante desde el punto de vista de las aplicaciones. Ejemplos de sentencias que presentan cuantificación binaria son: “*la mayoría de los estudiantes son españoles*”, “*alrededor del 70 % o más de los estudiantes son españoles*”, “*hay más mujeres que hombres*”, etc.

<b>Definición de cuantificadores unarios</b>	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
Unario cuantitativo $Q_{E,1,card}^{fn}(Y)=fn( Y )$	“alrededor de 3 son estudiantes”
Unario cuantitativo $Q_{E,1,prop}^{fn}(Y)=fn\left(\frac{ Y }{ E }\right)$	“alrededor del 10 % son estudiantes”
Unario cuantitativo $Q_{E,1,all.but.card}^{fn}(Y)=fn( E\setminus Y )$	“todos menos alrededor de 3 son estudiantes”
Unario cuantitativo $Q_{E,1,all.but.prop}^{fn}(Y)=fn\left(\frac{ E\setminus Y }{ E }\right)$	“todos menos alrededor del 10 % son estudiantes”

**Tabla 4.1:** Definición de cuantificadores unarios.

Hemos dividido los cuantificadores binarios en cuatro grupos principales. Los dos primeros contemplan cuantificadores que se pueden asociar fácilmente a sentencias de lenguaje natural. En el primero se consideran los cuantificadores conservativos (expresables a partir de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_1 \cap Y_2|$ ). Y en el segundo se consideran los cuantificadores comparativos (expresables a partir de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_2|$ ). El tercer grupo incluye algunos cuantificadores muy útiles para medir la similaridad de conjuntos, los cuales en su forma más básica son expresables a partir de las cardinalidades  $|Y_1 \cup Y_2|, |Y_1 \cap Y_2|$ . El cuarto grupo es el menos interesante e incluye los cuantificadores que se definen a partir de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_1 \cup Y_2|$ . Si sólo consideramos los cuantificadores de similaridad más básicos, los distintos grupos se caracterizan porque dependen de únicamente dos de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_2|, |Y_1 \cap Y_2|, |Y_1 \cup Y_2|$ .

El apartado finaliza con un teorema que demuestra que cualquier cuantificador semi-borroso cuantitativo binario es expresable a partir de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_2|, |Y_1 \cap Y_2|$ . Como se cumple que  $|Y_1 \cup Y_2| = |Y_1| + |Y_2| - |Y_1 \cap Y_2|$  esto demuestra que cualquier cuantificador binario cuantitativo se puede expresar a partir de tres de las cardinalidades anteriores.

### 4.3.1. Cuantificadores semi-borrosos binarios conservativos

La principal característica de los cuantificadores presentados en esta sección es el cumplimiento de la propiedad de conservatividad [40, 56–58]. Intuitivamente, los

cuantificadores binarios conservativos son aquellos cuya semántica no se modifica cuando limitamos el alcance del cuantificador a su restricción. Por ejemplo, la semántica de la sentencia “*la mayoría de los estudiantes son españoles*” es equivalente a la semántica de la sentencia “*la mayoría de los estudiantes son estudiantes y españoles*”. Más ejemplos de cuantificadores conservativos son “*alrededor del 30 %*”, “*todos excepto 10*”, etc. La definición de la propiedad de conservatividad para cuantificadores semi-borrosos es la siguiente<sup>2</sup>:

**Teorema 43** [47, pág. 301] *Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso binario en un conjunto base  $E \neq \emptyset$ . Si  $Q$  es conservativo, entonces  $Q(Y_1, Y_2)$  está completamente determinado por las cardinalidades de  $|Y_1|$  e  $|Y_1 \cap Y_2|$ , para todo  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .*

Tal como se indica en [47, pág. 301], todo cuantificador semi-borroso binario cuantitativo conservativo  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto referencial finito se puede expresar en función de  $|Y_1|$  y  $|Y_1 \cap Y_2|$  utilizando una función  $q : \{0, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  adecuada; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1|, |Y_1 \cap Y_2|)$$

para todo  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

Los cuantificadores conservativos son, con mucho, los más habituales en las expresiones de lenguaje natural y los que más atención han recibido en TGQ. Se asocian normalmente a sentencias del tipo  $\langle 1, 1 \rangle$ .

Hemos distinguido dos grupos principales de cuantificadores conservativos: *cuantificadores conservativos absolutos* y *cuantificadores conservativos proporcionales*. Como veremos, los cuantificadores absolutos engloban a los cuantificadores de primera clase de Zadeh [103], mientras que los cuantificadores proporcionales se corresponden con los cuantificadores de segunda clase.

### Cuantificadores semi-borrosos binarios absolutos

Bajo el epígrafe de cuantificadores semi-borrosos binarios absolutos hemos incluido los cuantificadores que aparecen asociados en TGQ a los determinantes *cardina-*

<sup>2</sup>En ocasiones la propiedad de conservatividad se extiende a cuantificadores de mayor aridad (e.g., ternarios). Véase por ejemplo [56, pág. 55].

les y co-cardinales [56–58]<sup>3</sup>. Los cuantificadores cardinales dependen de una manera absoluta de la cardinalidad de la intersección de las propiedades involucradas. Por ejemplo, la veracidad de la afirmación “*alrededor de 6 estudiantes son españoles*” depende del número absoluto de individuos que verifican las propiedades de “*ser estudiante*” y “*ser español*”. Los cuantificadores co-cardinales dependen de una manera absoluta de los elementos de la restricción del cuantificador que no cumplen la propiedad asociada al alcance del cuantificador. Por ejemplo, la sentencia “*todos excepto 3 estudiantes son españoles*” es cierta si el número de estudiantes que no son españoles es 3.

Es importante destacar que los cuantificadores tratados en este apartado cumplen trivialmente la propiedad de conservatividad.

A continuación se introducen las definiciones que permiten caracterizar estos cuantificadores:

**Definición 98** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo binario  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es absoluto cardinal si  $Q(Y_1, Y_2)$  sólo depende  $|Y_1 \cap Y_2|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\} \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = fn(|Y_1 \cap Y_2|)$$

En [50], [47, pág. 321] estos cuantificadores semi-borrosos se denominan absolutos.

**Definición 99** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo binario  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es absoluto co-cardinal si  $Q(Y_1, Y_2)$  sólo depende  $|Y_1 \cap \overline{Y_2}|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\} \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = fn(|Y_1 \cap \overline{Y_2}|)$$

En [50], [47, pág. 321] estos cuantificadores semi-borrosos se denominan de excepción.

Nótese que si  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es cardinal entonces  $Q \neg : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es co-cardinal y viceversa.

---

<sup>3</sup>También son muy habituales las denominaciones “*cuantificadores absolutos*” y “*cuantificadores de excepción*”, aunque en esta memoria se ha preferido reservar la denominación “absoluta” para ambas clases de cuantificadores.

En la notación parametrizada planteamos la definición de cuantificadores semi-borrosos cardinales y co-cardinales a partir de un número borroso absoluto  $fn : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}$ :

- **Cuantificadores cardinales:**

$$Q_{E,2,card}^{fn}(Y_1, Y_2) = fn(|Y_1 \cap Y_2|)$$

- **Cuantificadores co-cardinales:**

$$Q_{E,2,co\_card}^{FN}(Y_1, Y_2) = fn(|Y_1 \cap \overline{Y_2}|)$$

Nótese que se cumple que

$$\begin{aligned} Q_{E,2,card}^{fn}(Y_1, Y_2) &= fn(|Y_1 \cap Y_2|) = Q_{E,1,card}^{fn}(Y_1 \cap Y_2) \\ Q_{E,2,co\_card}^{fn}(Y_1, Y_2) &= fn(|Y_1 \cap \overline{Y_2}|) = Q_{E,1,card}^{fn}(Y_1 \cap \overline{Y_2}) \end{aligned}$$

es decir, para un cuantificador semi-borroso cardinal  $Q(Y_1, Y_2)$  (respectivamente co-cardinal) podemos construir un cuantificador semi-borroso unario equivalente que toma como argumento  $Y_1 \cap Y_2$  (respectivamente  $Y_1 \cap \overline{Y_2}$ ). Nótese que el cuantificador **algún**: $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es cardinal mientras que el cuantificador **todos**: $\mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es co-cardinal, por lo que estos cuantificadores son reducibles a cuantificación unaria<sup>4</sup>.

En la tabla 4.2 se muestran las posibilidades para definir cuantificadores binarios cuantitativos absolutos que hemos considerado.

### Cuantificadores semi-borrosos binarios proporcionales

Los cuantificadores proporcionales se relacionan con los determinantes de denotación proporcional [56–58]. Algunos ejemplos de sentencias que involucran cuantificación proporcional son “*la mayoría de los estudiantes son españoles*”, “*alrededor del 70 % o más de los estudiantes son españoles*”, “*todos excepto alrededor del 10 % de los estudiantes son españoles*”. Aparte de su relevancia desde el punto de vista lingüístico, su interés para las aplicaciones es indudable. Es destacable que una

<sup>4</sup>En el caso borroso la validez de la transformación depende del QFM utilizado. Concretamente, si el QFM cumple la propiedad de las uniones y las intersecciones (véase la sección 1.4.1) entonces la transformación se puede aplicar en el caso borroso.

Definición de cuantificadores binarios absolutos	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
cardinal/absoluto $Q_{E,2,card}^{fn}(Y_1, Y_2) = fn( Y_1 \cap Y_2 )$	“alrededor de 5 estudiantes son españoles”
co-cardinal/excepción $Q_{E,2,co-card}^{fn}(Y_1, Y_2) = fn( Y_1 \setminus Y_2 )$	“todos excepto 5 estudiantes son españoles”

**Tabla 4.2:** Definición de cuantificadores binarios absolutos.

parte muy importante del esfuerzo investigador en cuantificación borrosa ha estado enfocado a la búsqueda de modelos válidos para cuantificadores proporcionales.

**Definición 100** [47, pág 323] Un cuantificador binario  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito es proporcional si existen  $v \in \mathbf{I}$ ,  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  tales que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1|, |Y_1 \cap Y_2|) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}\right) & |Y_1| \neq 0 \\ v & |Y_1| = 0 \end{cases}$$

para todo  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

Tomando  $v = 1$  se asume que la semántica del cuantificador “todos” es la misma que la semántica del cuantificador “100 %”.

En la notación parametrizada se plantean las siguientes posibilidades para definir cuantificadores proporcionales. Ambas utilizan un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ :

▪ **Forma proporcional:**

$$Q_{E,2,prop}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}\right) & Y_1 \neq \emptyset \\ v & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

Que se puede utilizar, por ejemplo, para evaluar expresiones del tipo “alrededor del 10 % de los estudiantes son españoles”.

▪ **Forma co-proporcional:**

$$Q_{E,2,co-prop}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \setminus Y_2|}{|Y_1|}\right) & Y_1 \neq \emptyset \\ v & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

Definición de cuantificadores binarios proporcionales	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
Proporcional $Q_{E,2,prop}^{fn,v}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 }\right) & Y_1 \neq \emptyset \\ v \in [0,1] & Y_1 = \emptyset \end{cases}$	“alrededor del 10 % de los estudiantes son españoles”
Proporcional $Q_{E,2,co-prop}^{fn,v}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{ Y_1 \setminus Y_2 }{ Y_1 }\right) & Y_1 \neq \emptyset \\ v \in [0,1] & Y_1 = \emptyset \end{cases}$	“todos excepto el 10 % de los estudiantes son españoles”

**Tabla 4.3:** Definición de cuantificadores binarios proporcionales.

Que permite evaluar expresiones similares a “*todos excepto el 10 % de los estudiantes son españoles*”.

En la tabla 4.3 se muestran las posibilidades para definir cuantificadores binarios proporcionales que hemos considerado.

### 4.3.2. Cuantificadores semi-borrosos binarios comparativos

La cuantificación binaria comparativa se presenta en lenguaje natural en sentencias existenciales [56, 58], como por ejemplo “*hay más mujeres que hombres*” o “*hay alrededor de cinco mujeres más que de hombres*”. Veremos más adelante que, de igual manera que para el caso de cuantificación unaria, en ocasiones es posible reducir cuantificadores de aridad superior al caso binario comparativo.

**Definición 101** <sup>5</sup> Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo binario  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es comparativo si  $Q(Y_1, Y_2)$  sólo depende de  $|Y_1|, |Y_2|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1|, |Y_2|)$$

para  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

<sup>5</sup>La definición es similar a la planteada en [47, pág. 333] para cuantificadores comparativos ternarios.

En nuestra notación parametrizada vamos a considerar las siguientes posibilidades para definir cuantificadores semi-borrosos binarios comparativos:

- **Forma absoluta:** Utilizando un número borroso absoluto  $fn : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{I}$

$$Q_{E,2,card\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2) = fn(|Y_1| - |Y_2|)$$

que se puede utilizar para evaluar sentencias similares a “*hay alrededor de 5 mujeres más que de hombres*”.

- **Forma proporcional:** Utilizando un número borroso proporcional<sup>6</sup>  $fn : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$

$$Q_{E,2,prop\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1|}{|Y_2|}\right) & Y_2 \neq \emptyset \\ fn(\infty) & Y_1 \neq \emptyset \wedge Y_2 = \emptyset \\ fn(1) & Y_1 = \emptyset \wedge Y_2 = \emptyset \end{cases}$$

que se puede utilizar para evaluar sentencias similares a “*hay alrededor del doble de mujeres que de hombres*”. En particular, para evaluar esta sentencia, podríamos utilizar el siguiente cuantificador semi-borroso:

$$Q_{E,2,prop\_comp}^{T_{1,2,2,3}}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} T_{1,2,2,3}\left(\frac{|Y_1|}{|Y_2|}\right) & Y_2 \neq \emptyset \\ 0 & Y_2 = \emptyset \end{cases}$$

Nótese que la definición 101 es más general que las expresiones absoluta y comparativa de definición de cuantificadores semi-borrosos. No obstante, las expresiones planteadas son las que tienen más interés práctico.

En la tabla 4.4 se muestran las posibilidades para definir cuantificadores binarios comparativos que se han considerado.

### 4.3.3. Cuantificadores semi-borrosos de similitud

El interés de la cuantificación no está limitado a aquellas situaciones más evidentes desde el punto de vista del lenguaje. Aunque los cuantificadores que se asocian

<sup>6</sup>La asignación de  $fn(1)$  al caso en que  $Y_1 = Y_2 = \emptyset$  es la más razonable (intuitivamente, la cantidad de  $Y_1$  es igual a la cantidad de  $Y_2$ ). En todo caso esta opción es solamente una posibilidad razonable y en la práctica se debe decidir cual es la opción más adecuada.

Definición de cuantificadores binarios comparativos	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
comparativo absoluto $Q_{E,2,card\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2) = fn( Y_1  -  Y_2 )$	“hay alrededor de 5 mujeres más que de hombres”
comparativo proporcional $Q_{E,2,prop\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{ Y_1 }{ Y_2 }\right) & Y_2 \neq \emptyset \\ fn(\infty) & Y_1 \neq \emptyset \wedge Y_2 = \emptyset \\ fn(1) & Y_1 = \emptyset \wedge Y_2 = \emptyset \end{cases}$	“hay el doble de mujeres que de hombres”

**Tabla 4.4:** Definición de cuantificadores binarios comparativos

fácilmente a expresiones del lenguaje natural son los más intuitivos, existen otros cuantificadores de mucho interés desde el punto de vista de las aplicaciones para los cuales no existe una correspondencia directa con expresiones del lenguaje natural. En este apartado se discuten y definen algunos cuantificadores semi-borrosos que permiten definir medidas de similaridad entre los argumentos. Estos cuantificadores son generalizaciones de algunos índices de similaridad estadísticos, los cuales son de mucha utilidad en aplicaciones de minería de datos [52] y de recuperación de información [72]. Son útiles para evaluar expresiones semejantes a “*la correlación entre los días de temperaturas bajas y los días de lluvias intensas es alta*”.

Recientemente, en [8], los autores han tratado la generalización de índices de similaridad mediante cuantificación borrosa, pero fuera del marco de trabajo basado en QFMs.

En su forma más básica los cuantificadores semi-borrosos de similaridad dependen de las cardinalidades  $|Y_1 \cup Y_2|$ ,  $|Y_1 \cap Y_2|$ . A continuación definimos los que hemos denominado *cuantificadores de similaridad simples*.

**Definición 102** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo binario  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es de similaridad simple si  $Q(Y_1, Y_2)$  sólo depende de  $|Y_1 \cup Y_2|$ ,  $|Y_1 \cap Y_2|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1 \cup Y_2|, |Y_1 \cap Y_2|)$$

para  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

El cuantificador de igualdad  $\mathbf{eq} : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$

$$\mathbf{eq}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 1 & : Y_1 = Y_2 \\ 0 & : Y_1 \neq Y_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

definido en [47, pág. 284] es un caso particular de los cuantificadores de similaridad simples. Basta tomar:

$$q(|Y_1 \cup Y_2|, |Y_1 \cap Y_2|) = \begin{cases} 1 & : |Y_1 \cup Y_2| = |Y_1 \cap Y_2| \\ 0 & : |Y_1 \cup Y_2| \neq |Y_1 \cap Y_2| \end{cases}$$

Vamos a plantear la definición de cuantificadores de similaridad simples utilizando un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,2,equal}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1 \cup Y_2|}\right) & Y_1 \cup Y_2 \neq \emptyset \\ v & Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \end{cases}$$

Además de los anteriores es posible definir otros cuantificadores semi-borrosos que son interesantes para medir el grado de solapamiento de  $Y_1$  y  $Y_2$ . Se muestran a continuación algunas posibilidades:

- **Generalización del índice ROC.** Se plantea a partir de un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,2,equal\_roc}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|^2}{|Y_1||Y_2|}\right) & Y_1 \neq \emptyset \wedge Y_2 \neq \emptyset \\ v & Y_1 = \emptyset \vee Y_2 = \emptyset \end{cases}$$

El cuantificador semi-borroso anterior es una generalización de la definición presentada en [39, pág. 62].

- **Generalización del índice de emparejamiento simple.** Se plantea a partir de un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} Q_{E,2,equal\_simple\_match}^{fn}(Y_1, Y_2) &= fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2| + |\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}|}{|Y_1 \cap Y_2| + |Y_1 \cap \overline{Y_2}| + |\overline{Y_1} \cap Y_2| + |\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}|}\right) \\ &= fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2| + |\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}|}{|E|}\right) \end{aligned}$$

En este índice de similaridad no se tienen en cuenta únicamente los elementos que cumplen las propiedades, sino que también se tienen en cuenta los elementos que no las cumplen.

Definición de cuantificadores binarios de similitud	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
De similitud básico $= \begin{cases} Q_{E,2,equal}^{fn}(Y_1, Y_2) \\ fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 \cup Y_2 }\right) & Y_1 \cup Y_2 \neq \emptyset \\ v & Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \end{cases}$	“la correlación entre los días de lluvia y de frío es alta”
Generalización del índice ROC $= \begin{cases} Q_{E,2,equal\_roc}^{fn}(Y_1, Y_2) \\ fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_2 ^2}{ Y_1  Y_2 }\right) & Y_1 \neq \emptyset \wedge Y_2 \neq \emptyset \\ v & Y_1 = \emptyset \vee Y_2 = \emptyset \end{cases}$	“la correlación entre los días de lluvia y de frío es alta”
Generalización del índice Dice $Q_{E,2,equal\_simple\_match}^{fn}(Y_1, Y_2) \\ = fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_2  +  Y_1 \cap \bar{Y}_2 }{ E }\right)$	“la correlación entre los días de lluvia y de frío es alta”
Generalización del índice de solapamiento simple $Q_{E,2,equal\_dice}^{fn}(Y_1, Y_2) \\ = \begin{cases} fn\left(\frac{2 Y_1 \cap Y_2 }{2 Y_1 \cap Y_2  +  Y_1 \cap \bar{Y}_2  +  \bar{Y}_1 \cap Y_2 }\right) & Y_1 \cup Y_2 \neq \emptyset \\ v & Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \end{cases}$	“la correlación entre los días de lluvia y de frío es alta”

**Tabla 4.5:** Definición de cuantificadores binarios de similitud.

- Generalización del índice Dice.** Se plantea a partir de un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,2,equal\_dice}^{fn}(Y_1, Y_2) \\ = \begin{cases} fn\left(\frac{2|Y_1 \cap Y_2|}{2|Y_1 \cap Y_2| + |Y_1 \cap \bar{Y}_2| + |\bar{Y}_1 \cap Y_2|}\right) & Y_1 \cup Y_2 \neq \emptyset \\ v & Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \end{cases}$$

que pondera positivamente el cumplimiento de la propiedades.

En la tabla 4.5 mostramos las posibilidades para definir los cuantificadores de similitud que hemos considerado<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>En los ejemplos, el término “correlación” se utiliza para indicar que los hechos mencionados transcurren parejos.

#### 4.3.4. Cuantificadores semi-borrosos de importancia relativa en la unión

Este tipo de cuantificadores permite medir la importancia relativa de una propiedad sobre la unión de ambas. Permite evaluar expresiones similares a “la proporción de los días de lluvia en los días de lluvia y nieve es alta”.

**Definición 103** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo binario  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es de importancia relativa en la unión si  $Q(Y_1, Y_2)$  sólo depende de  $|Y_1|, |Y_1 \cup Y_2|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1|, |Y_1 \cup Y_2|)$$

para  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

Plantaremos la definición de cuantificadores de importancia relativa en la unión utilizando un número borroso proporcional  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,2,prop\_union}^{fn}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1|}{|Y_1 \cup Y_2|}\right) & |Y_1 \cup Y_2| \neq \emptyset \\ v & |Y_1 \cup Y_2| = \emptyset \end{cases}$$

#### 4.3.5. Expresión general de los cuantificadores semi-borrosos binarios

Hemos descrito varias clases de cuantificadores semi-borrosos binarios de mucho interés práctico. No obstante no es difícil definir cuantificadores semi-borrosos cuantitativos que no encajan dentro de los grupos mencionados. En este apartado se demuestra que todo cuantificador semi-borroso cuantitativo binario es expresable a partir de una función que depende de las cardinalidades  $c_1 = |Y_1|$ ,  $c_2 = |Y_2|$  y  $c_3 = |Y_1 \cap Y_2|$ .

**Teorema 44** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso binario cuantitativo. Entonces existe una función  $q : \{0, \dots, m\}^3 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(c_1, c_2, c_3)$$

para todo  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ , y  $c_1 = |Y_1|$ ,  $c_2 = |Y_2|$  y  $c_3 = |Y_1 \cap Y_2|$ .

**Demostración.** Sabemos que todo cuantificador cuantitativo binario es expresable en función de las cardinalidades de las combinaciones booleanas de  $Y_1$  e  $Y_2$  ( $|Y_1 \cap Y_2|$ ,  $|Y_1 \cap \neg Y_2|$ ,  $|\neg Y_1 \cap Y_2|$ ,  $|\neg Y_1 \cap \neg Y_2|$ ) (véase el apartado 1.4.1); es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, m\}^4 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1 \cap Y_2|, |Y_1 \cap \neg Y_2|, |\neg Y_1 \cap Y_2|, |\neg Y_1 \cap \neg Y_2|)$$

Por lo tanto, para la demostración de la propiedad es suficiente comprobar que la cardinalidad de cualquier combinación booleana de  $Y_1$  e  $Y_2$  es expresable en función de las cardinalidades de  $|Y_1|$ ,  $|Y_2|$  e  $|Y_1 \cap Y_2|$ .

Como

$$\begin{aligned} |Y_1 \cap Y_2| &= c_3 \\ |Y_1 \cap \neg Y_2| &= |Y_1| - |Y_1 \cap Y_2| = c_1 - c_3 \\ |\neg Y_1 \cap Y_2| &= |Y_2| - |Y_1 \cap Y_2| = c_2 - c_3 \\ |\neg Y_1 \cap \neg Y_2| &= |E| - |Y_1 \cup Y_2| = |E| + |Y_1 \cap Y_2| - |Y_1| - |Y_2| = m + c_3 - c_1 - c_2 \end{aligned}$$

entonces el teorema se cumple para  $q' : \{0, \dots, m\}^3 \rightarrow \mathbf{I}$  definida como

$$\begin{aligned} q(|Y_1 \cap Y_2|, |Y_1 \cap \neg Y_2|, |\neg Y_1 \cap Y_2|, |\neg Y_1 \cap \neg Y_2|) \\ &= q(c_3, c_1 - c_3, c_2 - c_3, m + c_3 - c_1 - c_2) \\ &= q'(c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

■

Un resultado similar al del teorema anterior es que toda combinación booleana es expresable en función de las otras tres (e.g,  $Y_1 \cap Y_2 = E \setminus (Y_1 \cap \neg Y_2) \setminus (\neg Y_1 \cap Y_2) \setminus (\neg Y_1 \cap \neg Y_2)$ ), por lo que cualquier cuantificador binario cuantitativo es expresable en función de tres cardinalidades de entre  $|Y_1 \cap Y_2|$ ,  $|Y_1 \cap \neg Y_2|$ ,  $|\neg Y_1 \cap Y_2|$ ,  $|\neg Y_1 \cap \neg Y_2|$ .

Este resultado es de interés en la construcción de algoritmos para la evaluación de los modelos.

## 4.4. Cuantificadores semi-borrosos ternarios

En el lenguaje natural, la cuantificación ternaria aparece normalmente asociada a sentencias comparativas [56–58,86]. Algunos ejemplos de sentencias que involucran

cuantificación ternaria son los siguientes: “*más estudiantes que profesores han venido a la fiesta*” (propiedades “*ser estudiante*”, “*ser profesor*” y “*estar en la fiesta*”), “*hay alrededor del doble de estudiantes que de profesores en la fiesta*”, “*hay proporcionalmente alrededor del doble de mujeres en bicicleta que caminando*” (propiedades “*ser mujer*”, “*andar en bicicleta*”, “*estar caminando*”). Otro ejemplo bastante característico de cuantificador ternario es el de cuantificador ternario de excepción. Un ejemplo de una sentencia en la que aparece un cuantificador ternario de excepción es “*todos los estudiantes excepto los españoles están en clase*” (propiedades “*ser estudiante*”, “*ser español*”, “*estar en clase*”).

#### 4.4.1. Cuantificadores semi-borrosos ternarios comparativos

Vamos a clasificar los cuantificadores cuantitativos comparativos ternarios en dos grupos. El primer grupo, formado por los cuantificadores comparativos cardinales [56–58, 86], involucra comparaciones sobre medidas absolutas de las cardinalidades. En la definición del segundo grupo se utiliza una definición general que engloba el importante caso de los cuantificadores comparativos sobre proporciones.

El grupo de cuantificadores comparativos cardinales lo dividimos a su vez en dos subgrupos, el primero dependiente de las cardinalidades  $|Y_1 \cap Y_3|$  e  $|Y_2 \cap Y_3|$  (como por ejemplo en la sentencia “*alrededor de 10 estudiantes más que profesores están en la fiesta*”); y el segundo dependiente de las cardinalidades  $|Y_1 \cap Y_2|$  e  $|Y_1 \cap Y_3|$  (como por ejemplo en la sentencia “*alrededor de 10 estudiantes más están en el lago que en la fiesta*”).

**Definición 104** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo ternario  $Q : \mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es comparativo sobre el cardinal de primer tipo si  $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$  sólo depende de las cardinalidades  $|Y_1 \cap Y_3|$ ,  $|Y_2 \cap Y_3|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3) = q(|Y_1 \cap Y_3|, |Y_2 \cap Y_3|)$$

para  $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathcal{P}(E)$ .

En [47, pág. 333] se define estos cuantificadores simplemente como comparativos cardinales. En esta memoria estos cuantificadores se denominan comparativos cardinales de primer tipo (de una manera análoga a como se hace en [24]) para distinguirlos de los siguientes:

**Definición 105** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo ternario  $Q : \mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es comparativo sobre el cardinal de segundo tipo si  $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$  sólo depende de las cardinalidades  $|Y_1 \cap Y_2|, |Y_1 \cap Y_3|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3) = q(|Y_1 \cap Y_2|, |Y_1 \cap Y_3|)$$

para  $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathcal{P}(E)$ .

Desde el punto de vista lingüístico, los cuantificadores cardinales de primer tipo se asocian a sentencias de tipo  $\langle\langle 1, 1 \rangle, 1\rangle$  (dos frases nominales y un predicado) mientras que los cuantificadores cardinales de segundo tipo se asocian a sentencias de tipo  $\langle 1, \langle 1, 1 \rangle \rangle$  (una frase nominal y dos predicados).

En la notación parametrizada consideramos las siguientes posibilidades para definir cuantificadores semi-borrosos cardinales:

▪ **Cuantificadores cardinales de primer tipo.**

- A partir de un número borroso absoluto  $fn : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,3,card-comp-\langle\langle 1,1 \rangle,1\rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3) = fn(|Y_1 \cap Y_3| - |Y_2 \cap Y_3|)$$

que se puede utilizar para evaluar expresiones similares a “*alrededor de diez estudiantes más que profesores están en la fiesta*”.

- A partir de un número borroso proporcional  $fn : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,3,card-prop-\langle\langle 1,1 \rangle,1\rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_2 \cap Y_3|}\right) & (Y_1 \cap Y_3 \neq \emptyset) \wedge (Y_2 \cap Y_3 \neq \emptyset) \\ fn(\infty) & (Y_1 \cap Y_3 \neq \emptyset) \wedge (Y_2 \cap Y_3 = \emptyset) \\ fn(1) & (Y_1 \cap Y_3 = \emptyset) \wedge (Y_2 \cap Y_3 = \emptyset) \end{cases}$$

que se puede utilizar en la evaluación de expresiones similares “*alrededor del doble de estudiantes que de profesores están en la fiesta*”.

▪ **Cuantificadores cardinales de segundo tipo.**

- A partir de un número borroso absoluto  $fn : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,3,card-comp-\langle 1, \langle 1, 1 \rangle \rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3) = fn(|Y_1 \cap Y_2| - |Y_1 \cap Y_3|)$$

que se puede utilizar, por ejemplo, para evaluar expresiones del tipo “*alrededor de diez estudiantes más están en el lago que en la fiesta*”.

- A partir de un número borroso proporcional  $fn : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,3,card\_prop-\langle 1,\langle 1,1 \rangle \rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1 \cap Y_3|}\right) & (Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset) \wedge (Y_1 \cap Y_3 \neq \emptyset) \\ fn(\infty) & (Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset) \wedge (Y_1 \cap Y_3 = \emptyset) \\ fn(1) & (Y_1 \cap Y_2 = \emptyset) \wedge (Y_1 \cap Y_3 = \emptyset) \end{cases}$$

que se puede utilizar en la evaluación de la expresiones similares “*alrededor del doble de estudiantes están en el lago que en la fiesta*”.

Nótese que si  $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$  es comparativo cardinal de primer tipo entonces  $Q(Y_1, Y_2, Y_3) \tau_3$  es comparativo cardinal de segundo tipo. Además, los cuantificadores semi-borrosos comparativos ternarios de primer y segundo tipo se pueden reducir a cuantificadores comparativos binarios<sup>8</sup>. Por ejemplo,

$$Q_{E,3,card\_comp-\langle 1,1,1 \rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3) = Q_{E,2,card\_comp}^{fn}(Y_1 \cap Y_2, Y_1 \cap Y_3)$$

La siguiente definición engloba los cuantificadores necesarios para evaluar expresiones similares a “*la proporción de mujeres que están caminando es alrededor del doble de la proporción de hombres que están caminando*”. La definición es muy general y puede englobar cuantificadores muy diversos. El interés principal de la definición se debe a que engloba expresiones similares a la mencionada.

**Definición 106** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo ternario  $Q : \mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es comparativo general si  $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$  depende de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_1 \cap Y_3|, |Y_2|, |Y_2 \cap Y_3|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^4 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3) = q(|Y_1|, |Y_1 \cap Y_3|, |Y_2|, |Y_2 \cap Y_3|)$$

para  $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathcal{P}(E)$ .

<sup>8</sup>Pese al comportamiento excelente de los modelos de cuantificación recogidos en este trabajo en el caso borroso normalmente no está garantizada la validez de esta transformación. En particular, los modelos  $\mathcal{F}^I$  y  $\mathcal{F}^A$  violan la misma. De igual manera, por lo menos el modelo  $\mathcal{M}$ , definido en [47, pág. 197] y analizado en la sección 1.5.7, también la viola, por lo que los axiomas de los DFSs no garantizan el cumplimiento de esta transformación en el caso borroso.

El caso más interesante de este grupo se presenta a continuación en notación parametrizada. Lo denominaremos *cuantificador comparativo ternario sobre proporciones*:

Sea  $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$  un número borroso. Definimos:

$$Q_{E,3,comp.on.prop.\langle(1,1),1\rangle}^{fn,v}(Y_1, Y_2, Y_3) = \begin{cases} v \in [0, 1] & \text{indefinición de } \frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_1|} \text{ ó } \frac{|Y_2 \cap Y_3|}{|Y_2|} \\ fn\left(\frac{\frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_1|}}{\frac{|Y_2 \cap Y_3|}{|Y_2|}}\right) & \frac{|Y_2 \cap Y_3|}{|Y_2|} \neq 0 \\ fn(\infty) & \frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_1|} \neq 0 \wedge \frac{|Y_2 \cap Y_3|}{|Y_2|} = 0 \\ fn(1) & \frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_1|} = 0 \wedge \frac{|Y_2 \cap Y_3|}{|Y_2|} = 0 \end{cases}$$

<sup>9</sup> que se puede utilizar para evaluar sentencias como “*la proporción de mujeres que están caminando es alrededor del doble de la proporción de hombres que están caminando*”.<sup>10</sup>

Se podría pensar en realizar una definición análoga a la definición 106 para evaluar sentencias del tipo “*la proporción de mujeres que están caminando es el doble de la proporción de mujeres que están corriendo*”, pero nótese que

$$\frac{\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}}{\frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_1|}} = \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1 \cap Y_3|}$$

con lo que estaríamos en la situación de cuantificadores ternarios comparativos cardinales de segundo tipo.

En la tabla 4.6 se muestran las posibilidades para definir cuantificadores ternarios que hemos considerado.

<sup>9</sup>Los casos “problemáticos” de la definición son aquellos en los cuales una de las proporciones  $\frac{|Y_1 \cap Y_3|}{|Y_1|}$  ó  $\frac{|Y_2 \cap Y_3|}{|Y_2|}$  están indefinidas, en los cuales asignamos al resultado de la expresión un valor  $v$  arbitrario. El significado de la expresión “*la proporción de mujeres que están caminando es alrededor del doble de la proporción de hombres que están caminando*” es bastante confuso en caso de que, por ejemplo, el universo de discurso no contenga mujeres.

<sup>10</sup>La definición de cuantificador comparativo ternario general es muy amplia. La razón por la que se presenta de esta manera en vez de plantear únicamente el caso particular de los cuantificadores comparativos ternarios sobre proporciones es debido a que hemos querido mantener las definiciones de los cuantificadores semi-borrosos homogéneas, definiendo estos siempre como funciones de las cardinalidades de las combinaciones booleanas de los conjuntos argumento.

Definición de cuantificadores ternarios comparativos	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
Comp. cardinal de 1 <sup>er</sup> tipo $Q_{E,3,card\_comp-\langle(1,1),1\rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3)$ $= fn( Y_1 \cap Y_3  -  Y_2 \cap Y_3 )$	“alrededor de diez estudiantes más que profesores están en la fiesta”
Comp. cardinal de 2 <sup>o</sup> tipo $Q_{E,3,card\_comp-\langle 1, \langle 1, 1 \rangle \rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3)$ $= fn( Y_1 \cap Y_2  -  Y_1 \cap Y_3 )$	“alrededor de diez estudiantes más están en el lago que en la fiesta”
Comp. cardinal proporcional de 1 <sup>er</sup> tipo $Q_{E,3,card\_prop-\langle(1,1),1\rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3)$ $= \begin{cases} fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_3 }{ Y_2 \cap Y_3 }\right) & (Y_1 \cap Y_3 \neq \emptyset) \wedge (Y_2 \cap Y_3 \neq \emptyset) \\ fn(\infty) & (Y_1 \cap Y_3 \neq \emptyset) \wedge (Y_2 \cap Y_3 = \emptyset) \\ fn(1) & (Y_1 \cap Y_3 = \emptyset) \wedge (Y_2 \cap Y_3 = \emptyset) \end{cases}$	“alrededor del doble de estudiantes que de profesores están en la fiesta”
Comp. cardinal proporcional de 2 <sup>o</sup> tipo $Q_{E,3,card\_prop-\langle 1, \langle 1, 1 \rangle \rangle}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3)$ $= \begin{cases} fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 \cap Y_3 }\right) & (Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset) \wedge (Y_1 \cap Y_3 \neq \emptyset) \\ fn(\infty) & (Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset) \wedge (Y_1 \cap Y_3 = \emptyset) \\ fn(1) & (Y_1 \cap Y_2 = \emptyset) \wedge (Y_1 \cap Y_3 = \emptyset) \end{cases}$	“alrededor del doble de estudiantes están en el lago que en la fiesta”
Comp. sobre proporciones $Q_{E,3,comp\_on\_prop-\langle(1,1),1\rangle}^{fn,v}(Y_1, Y_2, Y_3)$ $= \begin{cases} v \in [0,1] & \text{indefinición de } \frac{ Y_1 \cap Y_3 }{ Y_1 } \circ \frac{ Y_2 \cap Y_3 }{ Y_2 } \\ fn\left(\frac{\frac{ Y_1 \cap Y_3 }{ Y_1 }}{\frac{ Y_2 \cap Y_3 }{ Y_2 }}\right) & \frac{ Y_2 \cap Y_3 }{ Y_2 } \neq 0 \\ fn(\infty) & \frac{ Y_1 \cap Y_3 }{ Y_1 } \neq 0 \wedge \frac{ Y_2 \cap Y_3 }{ Y_2 } = 0 \\ fn(1) & \frac{ Y_1 \cap Y_3 }{ Y_1 } = 0 \wedge \frac{ Y_2 \cap Y_3 }{ Y_2 } = 0 \end{cases}$	“la proporción de estudiantes caminando es el doble de la de profesores caminando”

Tabla 4.6: Definición de cuantificadores ternarios comparativos

### 4.4.2. Cuantificador semi-borroso ternario de excepción

Consideramos ahora el caso particular del cuantificador semi-borroso ternario de excepción:

**Definición 107** El cuantificador semi-borroso ternario **todos\_excep** :  $\mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $E \neq \emptyset$  de excepción se define como

$$\mathbf{todos\_excep}(Y_1, Y_2, Y_3) = \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap \neg Y_3 \neq Y_1 \cap Y_2 \\ 1 & : Y_1 \cap \neg Y_3 = Y_1 \cap Y_2 \end{cases}$$

Este cuantificador se puede utilizar para evaluar sentencias similares a “*todos los estudiantes excepto los españoles están en la fiesta*”. De esta manera, la expresión anterior es cierta si el conjunto de estudiantes que no están en la fiesta es el mismo que el conjunto de estudiantes que son españoles<sup>11</sup>.

Nótese que **todos\_excep** :  $\mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  es un cuantificador cuantitativo pues se puede redefinir en función del cuantificador **eq** :  $\mathcal{P}(E)^3 \rightarrow \mathbf{I}$  (véase la expresión 4.2) que también lo es:

$$\begin{aligned} & \mathbf{todos\_excep}(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap \neg Y_3 \neq Y_1 \cap Y_2 \\ 1 & : Y_1 \cap \neg Y_3 = Y_1 \cap Y_2 \end{cases} \\ &= \mathbf{eq}(Y_1 \cap \neg Y_3, Y_1 \cap Y_2) \\ &= \begin{cases} 0 & : |(Y_1 \cap \neg Y_3) \cap (Y_1 \cap Y_2)| \neq |(Y_1 \cap \neg Y_3) \cup (Y_1 \cap Y_2)| \\ 1 & : |(Y_1 \cap \neg Y_3) \cap (Y_1 \cap Y_2)| = |(Y_1 \cap \neg Y_3) \cup (Y_1 \cap Y_2)| \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & : |Y_1 \cap Y_2 \cap \neg Y_3| \neq |(Y_1 \cap \neg Y_3) \cup (Y_1 \cap Y_2)| \\ 1 & : |Y_1 \cap Y_2 \cap \neg Y_3| = |(Y_1 \cap \neg Y_3) \cup (Y_1 \cap Y_2)| \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Otra posibilidad para definir este cuantificador es:

$$\begin{aligned} \mathbf{todos\_excep}(Y_1, Y_2, Y_3) &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \cap \neg Y_2 \not\subseteq Y_3 \\ 1 & : Y_1 \cap \neg Y_2 \subseteq Y_3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & : Y_1 \not\subseteq (Y_2 \cup Y_3) \\ 1 & : Y_1 \subseteq (Y_2 \cup Y_3) \end{cases} \end{aligned}$$

Parafraseando, los estudiantes o son españoles o están en la fiesta. Mientras la primera interpretación asume que ningún estudiante español está en la fiesta, esta interpretación permite que haya algún estudiante español en la fiesta.

## 4.5. Cuantificadores semi-borrosos cuaternarios

Los cuantificadores cuaternarios [86] que vamos a considerar son muy parecidos a los cuantificadores ternarios comparativos definidos en la sección previa. Algunos ejemplos de expresiones que involucran cuantificación cuaternaria son: “*más estudiantes han venido a la fiesta que profesores han ido al lago*” (propiedades “*ser estudiante*”, “*estar en la fiesta*”, “*ser profesor*” y “*estar en el lago*”), “*hay más del doble de estudiantes en la fiesta que de profesores en el lago*”, “*hay proporcionalmente alrededor del doble de estudiantes en la fiesta que de profesores en el lago*”.

**Definición 108** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuantitativo cuaternario  $Q : \mathcal{P}(E)^4 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es comparativo sobre el cardinal si  $Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$  sólo depende de las cardinalidades  $|Y_1 \cap Y_2|, |Y_3 \cap Y_4|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = q(|Y_1 \cap Y_2|, |Y_3 \cap Y_4|)$$

para  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \mathcal{P}(E)$ .

En la notación parametrizada consideramos las siguientes posibilidades para definir cuantificadores semi-borrosos comparativos cuaternarios:

- A partir de un número borroso absoluto  $fn : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,4,card\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = fn(|Y_1 \cap Y_2| - |Y_3 \cap Y_4|)$$

que se puede utilizar, por ejemplo, para evaluar expresiones del tipo “*alrededor de 10 estudiantes más están en la fiesta que profesores están en el lago*”.

- A partir de un número borroso proporcional  $fn : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$ :

$$Q_{E,4,card\_prop}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \begin{cases} fn\left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_3 \cap Y_4|}\right) & (Y_3 \cap Y_4 \neq \emptyset) \\ fn(\infty) & (Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset) \wedge (Y_3 \cap Y_4 = \emptyset) \\ fn(1) & (Y_1 \cap Y_2 = \emptyset) \wedge (Y_3 \cap Y_4 = \emptyset) \end{cases}$$

que se puede utilizar en la evaluación de la expresiones similares “*alrededor del doble o más de estudiantes están en la fiesta que profesores están en el lago*”.

De igual manera que en el caso ternario realizamos la definición de la clase de cuantificadores comparativos generales:

**Definición 109** Diremos que un cuantificador semi-borroso cuaternario  $Q : \mathcal{P}(E)^4 \rightarrow \mathbf{I}$  sobre un conjunto base finito  $E \neq \emptyset$  es comparativo general si  $Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$  sólo depende de las cardinalidades  $|Y_1|, |Y_1 \cap Y_2|, |Y_3|, |Y_3 \cap Y_4|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, |E|\}^4 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = q(|Y_1|, |Y_1 \cap Y_2|, |Y_3|, |Y_3 \cap Y_4|)$$

para  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \mathcal{P}(E)$ .

El caso más interesante es el de *cuantificadores comparativos cuaternarios sobre proporciones*. Sea  $fn : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{I}$  un número borroso. En notación parametrizada realizamos la siguiente definición:

$$Q_{E,4,comp.on.prop}^{fn,v}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \begin{cases} v \in [0, 1] & \text{indefinición de } \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \text{ ó } \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} \\ fn\left(\frac{\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}}{\frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|}}\right) & \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} \neq 0 \\ fn(\infty) & \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \neq 0 \wedge \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} = 0 \\ fn(1) & \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} = 0 \wedge \frac{|Y_3 \cap Y_4|}{|Y_3|} = 0 \end{cases}$$

Desde el punto de vista lingüístico, los cuantificadores cuaternarios se suelen asociar a sentencias del tipo  $\langle\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\rangle$  (dos frases nominales y dos predicado).

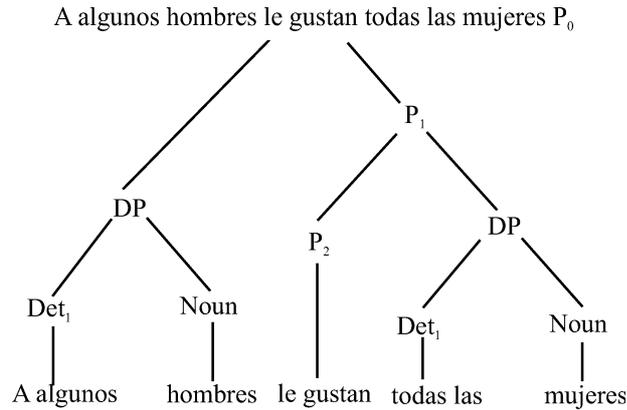
En la tabla 4.7 se muestran las posibilidades para definir cuantificadores cuaternarios comparativos que hemos considerado.

## 4.6. Sentencias con cuantificación anidada

En este apartado se muestra como se pueden evaluar sentencias en las que aparecen cuantificadores anidados. Algunos ejemplos de sentencias en las que aparece este tipo de cuantificación son: “*existe un hombre al que le gustan todas las mujeres*”, “*a casi todos los hombres le gustan casi todas las mujeres*”, y “*a casi todos los hombres le gustan más mujeres rubias que morenas*”. La metodología que se propone es una simplificación de la que hemos planteado en [24].

Definición de cuantificadores cuaternarios comparativos	
Cuantificador semi-borroso	Ejemplo
Comp. cardinal $Q_{E,4,card\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = fn( Y_1 \cap Y_2  -  Y_3 \cap Y_4 )$	“alrededor de diez estudiantes más están en la fiesta que profesores están en el lago”
Comp. cardinal proporcional $Q_{E,4,prop\_comp}^{fn}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ $= \begin{cases} fn\left(\frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_3 \cap Y_4 }\right) & Y_3 \cap Y_4 \neq \emptyset \\ fn(\infty) & (Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset) \wedge (Y_3 \cap Y_4 = \emptyset) \\ fn(1) & (Y_1 \cap Y_2 = \emptyset) \wedge (Y_3 \cap Y_4 = \emptyset) \end{cases}$	“alrededor del doble o más de estudiantes están en la fiesta que profesores están en el lago”
Comp. sobre proporciones $Q_{E,4,on\_prop\_comp}^{fn,v}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ $= \begin{cases} v \in [0,1] & \text{indefinición de } \frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 } \text{ ó } \frac{ Y_3 \cap Y_4 }{ Y_3 } \\ fn\left(\frac{\frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 }}{\frac{ Y_3 \cap Y_4 }{ Y_3 }}\right) & \frac{ Y_3 \cap Y_4 }{ Y_3 } \neq 0 \\ fn(\infty) & \frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 } \neq 0 \wedge \frac{ Y_3 \cap Y_4 }{ Y_3 } = 0 \\ fn(1) & \frac{ Y_1 \cap Y_2 }{ Y_1 } = 0 \wedge \frac{ Y_3 \cap Y_4 }{ Y_3 } = 0 \end{cases}$	“la proporción de mujeres que están caminando es el doble de la proporción de hombres que están corriendo”

Tabla 4.7: Definición de cuantificadores cuaternarios



**Figura 4.1:** Análisis sintáctico de la sentencia “*a algunos hombres le gustan todas las mujeres*”.

En la figura 4.1 se muestra el análisis sintáctico de la sentencia “*a algunos hombres le gustan todas las mujeres*”. En la misma “*le gusta*” es un predicado binario ( $\text{le\_gusta} \in \mathcal{P}(E^2)$ ) que se combina con la frase nominal “*todas las mujeres*” para formar el predicado unario “*le gustan todas las mujeres*”. La denotación de “*le gustan todas las mujeres*” es el predicado unario (o conjunto) de hombres a los cuales le gustan todas las mujeres.

Para evaluar sentencias en las que aparece cuantificación anidada es necesario plantear alguna manera de combinar los cuantificadores no sólo con predicados unarios, sino también con relaciones. Las definiciones que se plantean en este apartado permiten realizar esta tarea. Para mantener la notación comprensible sólo vamos a permitir la aplicación de los cuantificadores a la última dimensión de las relaciones<sup>12</sup>. En el caso general la operativa que proponemos debería de estar incluida dentro de algún tipo de álgebra relacional borrosa, de obvia aplicación en el campo de bases de datos borrosas [11–14].

**Definición 110** Sea  $r > 0$ ,  $R \in \tilde{\mathcal{P}}(E^{r+1})$  una relación borrosa  $(r + 1)$ -aria sobre  $E$  y  $x = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$  una  $r$ -tupla de elementos de  $E$  ( $x$  nítida). Denotaremos por  $xR$  el conjunto borroso sobre  $E$  definido como

$$\mu_{xR}(e) = \mu_R(\langle x_1, \dots, x_r, e \rangle), e \in E$$

<sup>12</sup>El planteamiento realizado en [24] es algo más general pero conceptualmente idéntico.

**Ejemplo 45** Consideremos la relación borrosa “*le\_gusta*”, definida como sigue:

$$\mathit{le\_gusta} = \left\{ \begin{array}{l} 0,8 / (\text{Juan}, \text{María}), 1 / (\text{Juan}, \text{Eva}), 0,5 / (\text{Sonia}, \text{Roberto}), \\ 1 / (\text{Sonia}, \text{Juan}), 0,2 / (\text{Juan}, \text{Sonia}) \end{array} \right\}$$

Entonces,

$$\mu_{\langle \text{Juan} \rangle \mathit{le\_gusta}} (\text{María}) = \mu_{\mathit{le\_gusta}} (\langle \text{Juan}, \text{María} \rangle) = 0,8$$

$$\mu_{\langle \text{Juan} \rangle \mathit{le\_gusta}} (\text{Eva}) = \mu_{\mathit{le\_gusta}} (\langle \text{Juan}, \text{Eva} \rangle) = 1$$

$$\mu_{\langle \text{Juan} \rangle \mathit{le\_gusta}} (\text{Sonia}) = \mu_{\mathit{le\_gusta}} (\langle \text{Juan}, \text{Sonia} \rangle) = 0,2$$

Y así,

$$\langle \text{Juan} \rangle \mathit{le\_gusta} = \{0,8 / \text{María}, 1 / \text{Eva}, 0,2 / \text{Sonia}\}$$

**Definición 111** Sea  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle \in E^r$ ,  $R \in \mathcal{P}(E^{r+1})$  una relación  $(r+1)$ -aria nítida. Definimos el operador sobre tuplas  $\%_Q : E^r \times \mathcal{P}(E^{r+1}) \rightarrow \mathbf{I}$  dependiente del cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ , y que utilizaremos en notación infija como

$$\langle x_1, \dots, x_r \rangle \%_Q R = Q(\langle x_1, \dots, x_r \rangle R)$$

De esta manera asignamos un valor de verdad a las tuplas  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$  de  $R$  en función del cumplimiento del cuantificador  $Q$  sobre los elementos que se relacionan con  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ . Nótese la utilidad de la definición 111 para la ampliación de los cuantificadores **existe** y **todos** de SQL [14] a cuantificadores arbitrarios.

**Ejemplo 46** Sea

$$\mathit{hombres} = \{ \text{Juan}, \text{Roberto}, \text{Pedro} \}$$

$$\mathit{mujeres} = \{ \text{María}, \text{Eva}, \text{Sonia}, \text{Elisa} \}$$

$$\mathit{le\_gusta} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Juan}, \text{María}), (\text{Juan}, \text{Eva}), (\text{Sonia}, \text{Roberto}), \\ (\text{Roberto}, \text{Sonia}), (\text{Sonia}, \text{Juan}), (\text{Juan}, \text{Sonia}) \end{array} \right\}$$

y el cuantificador semi-borroso

$$\begin{aligned} \mathit{CasiTodasLasMujeres}(Y) &= \mathit{CasiTodos}(\mathit{mujeres})(Y) \\ &= S_{0,5,1} \left( \frac{|Y \cap \mathit{mujeres}|}{|\mathit{mujeres}|} \right) \end{aligned}$$

<sup>13</sup> entonces,

$$\begin{aligned} \langle \text{Juan} \rangle \%_{\text{CasiTodasLasMujeres}} \text{le\_gusta} &= \text{CasiTodasLasMujeres}(\langle \text{Juan} \rangle \text{le\_gusta}) \\ &= \text{CasiTodasLasMujeres}(\{\text{María, Eva, Sonia}\}) \\ &= S_{0,5,1} \left( \frac{3}{4} \right) = 0,5 \end{aligned}$$

con lo que “a Juan le gustan casi todas las mujeres” tiene un valor de verdad 0,5, y

$$\begin{aligned} \langle \text{Roberto} \rangle \%_{\text{CasiTodasLasMujeres}} \text{le\_gusta} \\ &= \text{CasiTodasLasMujeres}(\{\text{Sonia}\}) = S_{0,5,1} \left( \frac{1}{4} \right) = 0 \\ \langle \text{Pedro} \rangle \%_{\text{CasiTodasLasMujeres}} \text{le\_gusta} \\ &= \text{CasiTodasLasMujeres}(\emptyset) = S_{0,5,1}(0) = 0 \end{aligned}$$

La siguiente definición extiende el operador anterior a conjuntos.

**Definición 112** Sea  $R \in \mathcal{P}(E^{r+1})$  una relación  $(r+1)$ -aria nítida, y  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario. El operador de conjuntos  $\%_Q : \mathcal{P}(E^{r+1}) \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(E^r)$  dependiente del cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  se define como:

$$\begin{aligned} \mu_{\%_Q(R)}(\langle x_1, \dots, x_r \rangle) &= \langle x_1, \dots, x_r \rangle \%_Q R \\ &= Q(\langle x_1, \dots, x_r \rangle R) \end{aligned}$$

donde  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle \in E^r$ .

**Ejemplo 47** Para el ejemplo previo tenemos

$$\%_{\text{CasiTodasLasMujeres}}(\text{le\_gusta}) = \{0,5/\text{Juan}, 0/\text{Roberto}, 0/\text{Pedro}\}$$

i.e.,  $\%_{\text{CasiTodasLasMujeres}}(\text{le\_gusta})$  es el conjunto de individuos a los cuales le gustan casi todas las mujeres.

<sup>13</sup>Se supone que el cuantificador semi-borroso  $\text{CasiTodasLasMujeres} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  está construido a partir del cuantificador semi-borroso  $\text{CasiTodos} : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  definido como

$$\text{CasiTodos}(Y_1, Y_2) = Q_{E,2,prop}^{S_{0,5,1}}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} S_{0,5,1} \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

Nótese la utilización de la notación lingüística explicada en 1.2.

La definición análoga para cuantificadores borrosos es:

**Definición 113** Sea  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle \in E^r$ ,  $R \in \tilde{\mathcal{P}}(E^{r+1})$  una relación borrosa  $(r+1)$ -aria. Definimos el operador sobre tuplas  $\tilde{\%}_{\tilde{Q}} : E^r \times \tilde{\mathcal{P}}(E^{r+1}) \rightarrow \mathbf{I}$  dependiente del cuantificador borroso  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ , y que utilizaremos en notación infija como

$$\langle x_1, \dots, x_r \rangle \tilde{\%}_{\tilde{Q}} R = \tilde{Q}(\langle x_1, \dots, x_r \rangle R)$$

Y la extensión del operador anterior a conjuntos:

**Definición 114** Sea  $R \in \tilde{\mathcal{P}}(E^{r+1})$  una relación borrosa  $(r+1)$ -aria, y  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador borroso unario. El operador de conjuntos  $\tilde{\%}_{\tilde{Q}} : \tilde{\mathcal{P}}(E^{r+1}) \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(E^r)$  dependiente del cuantificador borroso  $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  se define como:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\%}_{\tilde{Q}}}(\langle x_1, \dots, x_r \rangle) &= \langle x_1, \dots, x_r \rangle \tilde{\%}_{\tilde{Q}} R \\ &= \tilde{Q}(\langle x_1, \dots, x_r \rangle R) \end{aligned}$$

donde  $\langle x_1, \dots, x_r \rangle \in E^r$ .

Llegado este punto vamos a reconsiderar las sentencias que se plantearon al principio del apartado:

“Existe un hombre al que le gustan todas las mujeres”.

“A casi todos los hombres le gustan casi todas las mujeres”.

“A casi todos los hombres le gustan más mujeres rubias que morenas”.

Nótese que para la relación binaria  $\mathbf{le\_gusta} \in \tilde{\mathcal{P}}(E^2)$  tenemos

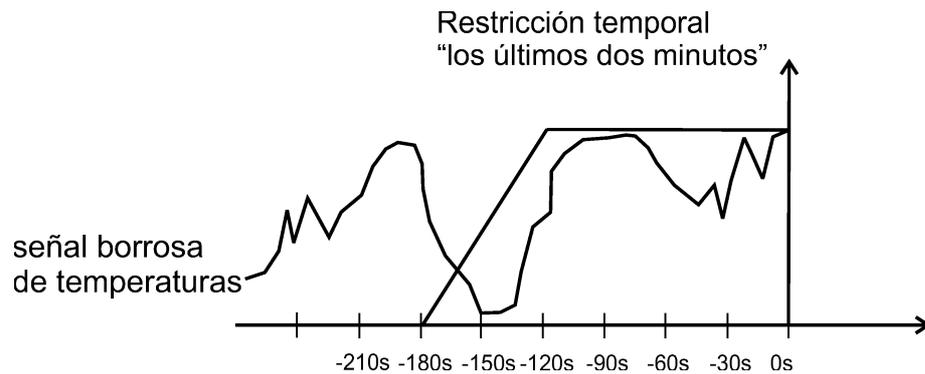
$$\begin{aligned} \tilde{\%}_{\mathbf{Todas(mujeres)}}(\mathbf{le\_gusta}) &\in \tilde{\mathcal{P}}(E) \\ \tilde{\%}_{\mathbf{CasiTodas(mujeres)}}(\mathbf{le\_gusta}) &\in \tilde{\mathcal{P}}(E) \\ \tilde{\%}_{\mathbf{mas...que(mujeres\_rubias,mujeres\_morenas)}}(\mathbf{le\_gusta}) &\in \tilde{\mathcal{P}}(E) \end{aligned}$$

Y así es fácil plantear la evaluación de las sentencias anteriores:

$\mathbf{algun(hombres)} \left( \tilde{\%}_{\mathbf{Todas(mujeres)}}(\mathbf{le\_gusta}) \right)$

$\mathbf{CasiTodos(hombres)} \left( \tilde{\%}_{\mathbf{CasiTodas(mujeres)}}(\mathbf{le\_gusta}) \right)$

$\mathbf{CasiTodos(hombres)} \left( \tilde{\%}_{\mathbf{mas...que(mujeres\_rubias,mujeres\_morenas)}}(\mathbf{le\_gusta}) \right)$



**Figura 4.2:** Representación de la señal borrosa “*temperaturas altas*” y de la restricción temporal borrosa “*los últimos dos minutos*”.

## 4.7. Aplicación de la clasificación de cuantificadores en el dominio temporal

En esta sección vamos a mostrar como se pueden adaptar los cuantificadores semi-borrosos que hemos planteado en este capítulo para realizar razonamientos lingüísticos en el dominio temporal, para la evaluación de distintos tipos de *proposiciones temporales borrosas* [15]. Una proposición temporal borrosa describe la ocurrencia de un evento dentro de una ventana o marco temporal. Consideremos, por ejemplo, la proposición temporal borrosa “*la mayoría de los valores de temperatura han sido altos en los últimos dos minutos*”. En dicha expresión “*la mayoría*” representa claramente un cuantificador; “*los últimos dos minutos*” representan una referencia temporal que en este caso se puede representar mediante un número borroso definido sobre el dominio del tiempo; y “*los valores de temperatura altos*” representan la aplicación de la etiqueta borrosa “*temperatura alta*”, a modo de filtro borroso, a un registro histórico de temperaturas. En la figura 4.2 representamos una posible señal borrosa de “*temperatura altas*” y el número borroso “*los últimos dos minutos*”.

El objetivo de la evaluación de este tipo de expresiones es resumir el cumplimiento de las mismas en un grado de verdad, basándose en los históricos de valores de señal, las relaciones entre las mismas, expresadas por medio de operadores temporales (“*hace 5 minutos*”) u operadores espaciales (“*media de las temperaturas altas*”), y la referencia temporal, que restringe el cumplimiento del evento.

En los siguientes apartados mostraremos como se pueden utilizar distintos tipos de cuantificadores semi-borrosos para modelar distintos tipos de proposiciones cuantificadas borrosas. Nuestro objetivo es demostrar que la clasificación que hemos desarrollado a lo largo de este capítulo es de aplicación inmediata en este dominio, al permitirnos identificar algunos tipos de proposiciones temporales borrosas que no habían sido tratadas en [15]. En su desarrollo, nos limitaremos a aquellos tipos de proposiciones temporales borrosas en las que interviene cuantificación, sin considerar en ningún momento la aplicación de operadores temporales o espaciales sobre las señales. En [15] se tratan en detalle este tipo de operadores.

Representaremos por  $T_1(t), T_2(t)$  las referencias temporales, modeladas mediante números borrosos definidos sobre el dominio del tiempo; y por  $S_1(t), S_2(t)$  “señales borrosas”, como puede ser “*temperaturas altas*”. El cálculo de estas señales a partir de los históricos de temperaturas se realiza mediante la aplicación de una operación de filtrado borroso (i.e., aplicación de una etiqueta borrosa) sobre la señal para obtener una “señal borrosa” con valores de pertenencia en el intervalo  $[0, 1]$ . En el caso de cuantificadores semi-borrosos es necesario suponer que el proceso de filtrado es nítido. De esta manera el resultado de la aplicación del filtro pertenece al conjunto de valores de verdad nítidos  $\{0, 1\}$ .

Aunque es un tema que no vamos a abordar en esta memoria, los algoritmos para la evaluación de QFMs pueden ser excesivamente lentos para trabajar en el dominio temporal cuando se plantea su utilización en aplicaciones en tiempo real. Nótese que el trabajo en tiempo real puede involucrar fácilmente ventanas de tiempo de varios miles de puntos. En [30] hemos planteado una aproximación muy eficiente del algoritmo del QFM  $\mathcal{F}^I$  especialmente adaptada a este dominio. Las ideas que se describen en este trabajo se pueden utilizar, de una manera sencilla, para plantear aproximaciones similares para el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$ .

#### 4.7.1. Cuantificación proporcional en el dominio temporal

La utilización de cuantificación proporcional para el razonamiento lingüístico en el dominio temporal ya ha sido planteada en [15–18]. Por su parte, en [73, 74] se muestra la aplicación en robótica móvil de este tipo de expresiones.

Presentamos a continuación algunas expresiones que se pueden modelar mediante la utilización de cuantificadores proporcionales:

“Todos los valores de temperatura del último mes fueron altos”.

“Alrededor del 80 % o más de los valores de temperatura del último mes fueron altos”.

“La temperatura ha sido alta en el último mes”.

“La mayoría de los valores de presión alta están asociados a valores de temperatura alta o media en los últimos minutos”.

“La distancia a la pared izquierda ha sido demasiado pequeña en los últimos segundos”.

“Los valores de velocidad han sido excesivamente altos en todos los momentos en los que la lluvia ha sido intensa en las últimas dos horas”.

Las expresiones en las que interviene una única señal se pueden modelar utilizando cuantificadores proporcionales similares a los planteados en la sección 4.3.1. Estas expresiones encajan en el patrón “ $Q$   $T$  son  $S$ ”. Por ejemplo, para modelar la expresión “*alrededor del 80 % de los valores de temperatura del último mes fueron altos*” podemos utilizar el siguiente cuantificador proporcional:

$$Q(T, S) = \begin{cases} S_{0,6,0,8} \left( \frac{|T \cap S|}{|T|} \right) & T \neq \emptyset \\ v \in [0, 1] & T = \emptyset \end{cases}$$

donde  $T(t)$  representa la restricción temporal “*el último mes*”,  $S(t)$  la señal de temperaturas altas (al estar en el caso semi-borroso hay que suponer que el filtro aplicado a la señal es nítido), y  $S_{0,6,0,8}(x)$  se utiliza para modelar “*alrededor del 80 % o más*”. Para construir el cuantificador borroso asociado a  $Q$  es suficiente aplicar un QFM  $\mathcal{F}$  adecuado. Nótese que  $\mathcal{F}(Q)$  admite que la restricción temporal  $T$  y la señal  $S$  sean borrosas.

Nótese que el ejemplo “*la distancia a la pared izquierda ha sido demasiado pequeña en los últimos segundos*” también encaja en el patrón anterior puesto que su significado en este contexto coincide con “*en alguno de los instantes de tiempo de los últimos segundos la distancia a la pared izquierda ha sido demasiado pequeña*”.

Para modelar las expresiones en las que intervienen dos señales borrosas (i.e., “*alrededor del 80 % o más de los valores de presión alta están asociados a valores de temperatura alta o media en los últimos minutos*”) utilizaremos una variante ternaria de los cuantificadores proporcionales. Estas expresiones encajan en el patrón “ $Q$   $T$

y  $S_1$  son  $S_2$ ". Se pueden modelar utilizando cuantificadores proporcionales ternarios del siguiente tipo:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} fn \left( \frac{|T \cap S_1 \cap S_2|}{|T \cap S_1|} \right) & T \cap S_1 \neq \emptyset \\ v \in [0, 1] & T \cap S_1 = \emptyset \end{cases}$$

donde  $fn : [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}$  es un número borroso proporcional. Por ejemplo, para modelar la expresión "*alrededor del 80 % o más de los valores de presión alta están asociados a valores de temperatura alta o media en los últimos minutos*" podemos utilizar el cuantificador semi-borroso:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} S_{0,6,0,8} \left( \frac{|T \cap S_1 \cap S_2|}{|T \cap S_1|} \right) & T \cap S_1 \neq \emptyset \\ 1 & T \cap S_1 = \emptyset \end{cases}$$

donde  $T(t)$  es la restricción temporal "*en los últimos minutos*",  $S_1(t)$  representa la señal "*presión alta*", y  $S_2(t)$  la señal "*temperatura alta o media*". Nótese que estamos reinterpremando la sentencia anterior como "*alrededor del 80 % o más de los instantes de tiempo de los últimos minutos en los que la presión es alta se asocian a temperaturas altas o medias*".

#### 4.7.2. Cuantificación comparativa en el dominio temporal

La cuantificación comparativa también presenta bastante interés para el razonamiento temporal. Presentamos a continuación una serie de ejemplos que se pueden modelar mediante este tipo de cuantificación:

"Hay alrededor del doble de días de lluvia intensa que de frío moderado en diciembre".

"Hay alrededor de cinco días de lluvia intensa más que de frío moderado en diciembre".

"Hay alrededor del doble de días de lluvia intensa en febrero que en diciembre".

"Hay alrededor de cinco días de lluvia intensa más en febrero que de frío moderado en enero".

"Hay alrededor del doble de valores de presión alta en la última media hora que en la media hora anterior".

“Los valores de velocidad excesiva en la última hora son el doble de los de la hora anterior”.

En general, la modificación de los cuantificadores semi-borrosos comparativos que hemos visto en este capítulo para incluir el dominio temporal es bastante sencilla. Por ejemplo, para modelar la sentencia “*hay alrededor del doble de días de lluvia intensa que de frío moderado en diciembre*” podemos utilizar el siguiente cuantificador semi-borroso:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} T_{1,2,2,3} \left( \frac{|S_1 \cap T|}{|S_2 \cap T|} \right) & S_2 \cap T \neq \emptyset \\ 0 & S_2 \cap T = \emptyset \end{cases}$$

donde  $T(t)$  representa la restricción temporal “*en diciembre*”,  $S_1(t)$  los días de lluvia intensa,  $S_2(t)$  los días de frío moderado, y  $T_{1,2,2,3}$  es un número borroso trapezoidal que se utiliza para modelar “*alrededor del doble*”.

### 4.7.3. Cuantificadores de similaridad en el dominio temporal

Los cuantificadores de similaridad también permiten modelar algunas expresiones muy interesantes cuando la cuantificación se aplica sobre una referencia temporal. Consideremos los siguientes ejemplos:

“La correlación entre los días de lluvia intensa y de frío moderado es alta en enero”.

“La correlación entre las presiones peligrosamente altas en los últimos cinco minutos y las temperaturas altas en los cinco minutos anteriores ha sido muy alta”.

“En los últimos años los valores altos del índice bursátil han estado muy correlacionados con los valores bajos del IPC”.

“El primer robot se mueve cerca de la zona defensiva siempre que el segundo robot se mueve cerca de la zona de ataque”.

El modelado de este tipo de expresiones se plantea fácilmente a partir de los cuantificadores de similaridad definidos en la sección 4.3.3. Por ejemplo, para modelar la expresión “*la correlación entre los días de lluvia intensa y de frío moderado*”

es alta en enero” podemos utilizar el siguiente cuantificador semi-borroso:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} S_{0,6,0,8} \left( \frac{|S_1 \cap S_2 \cap T|}{|(S_1 \cap T) \cup (S_2 \cap T)|} \right) & (S_1 \cap T) \cup (S_2 \cap T) \neq \emptyset \\ 1 & (S_1 \cap T) \cup (S_2 \cap T) = \emptyset \end{cases}$$

donde  $T(t)$  representa la restricción temporal “en enero”,  $S_1(t)$  los días de lluvia intensa,  $S_2(t)$  los días de frío moderado, y la función  $S_{0,6,0,8}(x)$  se utiliza para modelar el cuantificador, graduando el cociente  $\frac{|S_1 \cap S_2 \cap T|}{|(S_1 \cap T) \cup (S_2 \cap T)|}$ .

## 4.8. Algunos casos no considerados en la clasificación

En la clasificación que se ha planteado no hemos incluido ningún cuantificador no cuantitativo. Un cuantificador no cuantitativo de especial interés que ya ha sido presentado en esta memoria es el cuantificador de proyección (véase la expresión 1.7). También son ejemplos de cuantificadores no cuantitativos, los cuantificadores asociados a los nombres propios:

$$\mathbf{Juan}(Y) = \begin{cases} 0 & \{\mathbf{Juan}\} \notin Y \\ 1 & \{\mathbf{Juan}\} \in Y \end{cases}$$

que nos permiten evaluar expresiones del tipo “Juan es estudiante”:

Nótese que expresiones similares a “Juan, Javier y María son estudiantes” también tienen que ser manejadas mediante cuantificación no cuantitativa. Además, la restricción adjetival (explicada en la sección 1.4.1) origina en general cuantificadores no cuantitativos.

Tampoco hemos considerado cuantificadores asociados a determinantes definidos (artículos o demostrativos) como por ejemplo (véase [47, pág. 61]):

$$\mathbf{el}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 1 & : |Y_1| = 1 \wedge Y_1 \subseteq Y_2 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbf{los}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 1 & : |Y_1| > 1 \wedge Y_1 \subseteq Y_2 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

Otro punto importante es que no se han considerado cuantificadores semi-borrosos definidos sobre dominios continuos. Consideremos por ejemplo el cuantificador semi-borroso **alMenosEl80%DeLos**:  $\mathcal{P}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbf{I}$

$$\mathbf{alMenosEl80\%DeLos}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} S_{0,8,1} \left( \frac{\lambda(Y_1 \cap Y_2)}{\lambda(Y_1)} \right) & : \lambda(Y_1) \neq 0 \\ 1 & : \lambda(Y_1) = 0 \end{cases}$$

donde por  $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{I}$  denotamos la medida de Lebesgue. De esta manera el cuantificador anterior generaliza los cuantificadores proporcionales al caso continuo.

El cuantificador **alMenosEl80%DeLos**:  $\mathcal{P}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es de interés en la evaluación de expresiones temporales similares a las planteadas en el apartado anterior (e.g. “*al menos en el 80% del tiempo en el que la presión es excesiva la temperatura es demasiado alta*”) cuando suponemos que los registros de las señales se manejan de manera continua.

Este tipo de cuantificadores semi-borrosos son muy interesantes para muchas aplicaciones. La generalización de muchos de los cuantificadores semi-borrosos de la clasificación al caso continuo (entendiendo también otras situaciones como cuantificadores definidos sobre espacios de varias dimensiones  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  o  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ ) no parece demasiado difícil, pero en el desarrollo de esta memoria no han sido objeto de estudio. El análisis de las características que debe cumplir un QFM para manejar de manera adecuada conjuntos continuos es un problema abierto.

Para finalizar, tampoco hemos considerado el caso de “*cuantificación enraizada*”<sup>14</sup> que se asocia a expresiones del siguiente tipo:

“*La mayoría de los jóvenes y muchos de los viejos se respetan los unos a los otros*”

“*La mayoría de los chicos y la mayoría de las chicas se han citado alguna vez*”

“*Todos los hombres bailaron con todas las mujeres excepto Juan con María*”

“*Todos los estudiantes respondieron distintas preguntas*”

<sup>14</sup>“branching quantification” en inglés.

Nótese que la cuantificación enraizada es distinta de la cuantificación anidada explicada en el apartado 4.6. Una expresión con cuantificación anidada (e.g. “*a muchos hombres les gustan todas las mujeres*”) se resuelve por aplicación sucesiva de los cuantificadores a la relación, pero nunca aplicamos más de un cuantificador de cada vez. Esto es, primero combinamos la expresión cuantificada “*todas las mujeres*” (cuya semántica se modela por un cuantificador unario  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ ) con la relación le gustan, para obtener de esta manera un conjunto al que ya le podemos aplicar la expresión cuantificada “*muchos hombres*” (que también modelamos mediante un cuantificador unario). En cambio, las expresiones con cuantificación enraizada no se pueden resolver por este procedimiento de aplicación sucesiva de los cuantificadores. En “*la mayoría de los jóvenes y muchos de los viejos se respetan los unos a los otros*” la relación es bidireccional; esto es, indica si un par particular (joven,viejo) se respeta mutuamente, por lo que la técnica para evaluar expresiones con cuantificación anidada no es válida.

En [24] indicamos que las expresiones con cuantificación enraizada no habían sido tratadas en la bibliografía sobre cuantificación borrosa, pero no realizamos ningún intento para plantear su evaluación. Muy recientemente Glöckner ha propuesto su análisis desde el punto de vista borroso [46]. En [47, sección 12.7.] Glöckner muestra que la expresión “*la mayoría de los jóvenes y muchos de los viejos se respetan los unos a los otros*” se puede representar mediante el siguiente *cuantificador-L semi-borroso* de tipo  $\langle 1, 1, 2 \rangle$  (dos propiedades y una relación binaria):

$$Q(\mathbf{jovenes}, \mathbf{viejos}, \mathbf{respetarse}) \\ = \sup \{ \text{mín}(\mathbf{la\_mayoria}(\mathbf{jovenes}, U), \mathbf{muchos}(\mathbf{viejos}, V)) : U \times V \subseteq R \}$$

es decir, la expresión se cumple si existe un subconjunto  $U \times V \subseteq R$  de la relación “*respetarse*” tal que  $U$  contiene “*la mayoría de los jóvenes*” y  $V$  “*muchos de los viejos*”.

Aunque este tipo de cuantificadores puedan parecer un mero ejercicio teórico, tienen mucha utilidad en la definición de ciertas correlaciones complejas, tal como se indica en [46, pág. 142] (e.g. “*el consumo de muchos vegetales y muchos indicadores de salud están fuertemente correlacionados*”). La utilidad de estas expresiones en ámbitos como la minería de datos es indudable.

En este capítulo hemos desarrollado una exhaustiva definición y clasificación de

cuantificadores de indudable interés para las aplicaciones. Además, hemos mostrado como se pueden combinar los cuantificadores con relaciones para evaluar expresiones con cuantificación anidada. También hemos mostrado la aplicación de la clasificación desarrollada en el dominio temporal, planteando la semántica de algunas expresiones que nos parecen de mucho interés en el ámbito de las proposiciones temporales borrosas.

La clasificación de cuantificadores que hemos presentado es sin duda de aplicación en diversos ámbitos, tales como las bases de datos borrosas [13,14] o la recuperación de información [9,10]. Con respecto a la aplicación particular en el dominio temporal diremos que la clasificación nos ha permitido, de una manera sencilla, reconocer algunas expresiones que no habíamos considerado en otros trabajos previos

[15–18,73,74]. Creemos no equivocarnos al afirmar que este es uno de los campos en los que la utilización de cuantificación borrosa es más prometedora.

El próximo capítulo es el más aplicado de esta memoria. En el mismo vamos a mostrar como se puede utilizar cuantificación borrosa para extender la potencia de los lenguajes de consulta de recuperación de información. En este sentido no nos hemos limitado a realizar una propuesta teórica, sino que hemos evaluado el rendimiento de la misma con experimentación a gran escala con muy buenos resultados.



## Capítulo 5

# Cuantificación borrosa en recuperación de información

En este capítulo planteamos la utilización de cuantificación borrosa en recuperación de información (IR) para extender la potencia del lenguaje de consulta subyacente al modelo booleano extendido [79] y en particular de los modelos borrosos [59, 60, 75, 77]. Además, describimos cómo hemos utilizado esta propuesta para abordar la tarea de IR básica, que consiste en la recuperación de documentos en una base de datos documental. Siguiendo la metodología de evaluación estándar en el campo de IR, hemos contrastado el rendimiento de la misma contra las bases de datos del TREC [88]<sup>1</sup> con buenos resultados.

---

<sup>1</sup>TREC es el acrónimo de *Text REtrieval Conference*. Las conferencias TREC, de carácter anual, son probablemente el foro de evaluación más prestigioso en recuperación de información y actualmente contemplan multitud de tareas de IR.

Las bases de datos del TREC constituyen un cuasi-estándar para testar la eficacia de los sistemas de recuperación de IR. Particularmente, en nuestra experimentación, hemos utilizado el corpus *Wall Street journal* (WSJ) de la colección TREC, que contiene alrededor de 173.000 artículos de noticias que abarcan un periodo de unos seis años, y 50 consultas del TREC-3 (consultas #151-#200). El tamaño de estas bases de datos garantiza, en general, que los resultados obtenidos en la experimentación son significativos.

## 5.1. Motivación

La búsqueda del modo de ampliar la potencia y expresividad de los lenguajes de consulta ha sido una constante en el campo de IR. El modelo vectorial [2, pág. 27], que se detalla en el apartado 5.3.2, es sin duda el modelo más conocido y utilizado. Pero este modelo adolece de la poca expresividad que permite en la formulación de consultas, ya que sólo es capaz de articular consultas planas en las que todos los términos de la consulta se incorporan a un vector. Por este motivo se han realizado distintas propuestas que intentan superar las limitaciones expresivas del modelo vectorial [2]. Muchas de estas propuestas plantean la superación del modelo vectorial mediante la utilización de lenguajes de consulta basados en una sintaxis booleana [59, 60, 75, 77, 79] a la que se asocian distintos tipos de operadores (e.g.  $t$ normas y  $c$ normas en el caso particular del modelo borroso). Veremos que en general estos modelos presentan el serio inconveniente de que las operaciones que asocian a la sintaxis booleana no son adecuadas para IR [64], o bien sus capacidades de agregación de pesos son limitadas. El rendimiento de estos modelos es en general inferior al rendimiento que se obtiene mediante la utilización del modelo vectorial y, como consecuencia de ello, ninguna de estas propuestas se considera una alternativa realista al modelo vectorial. Además, algunos modelos borrosos nunca fueron implementados y evaluados empíricamente, por lo que su rendimiento en la recuperación de documentos se desconoce.

No obstante, la utilización de lenguajes de consulta más expresivos es sin duda un punto de interés primordial en IR. La causa del escaso éxito de los modelos anteriores en la tarea de recuperación de información se debe a que el planteamiento del lenguaje en sí no es suficiente para abordar esta tarea. Además del planteamiento del lenguaje, se necesita acompañar su sintaxis de semánticas que puedan garantizar un alto rendimiento en la práctica, de manera que estos modelos sean competitivos con el modelo vectorial. Este es el punto en el que fallan los modelos mencionados anteriormente. Por una parte plantean la realización de consultas complejas para intentar mejorar los resultados de las búsquedas, pero por otra la semántica que asocian a la sintaxis booleana no es realmente competitiva con dicho modelo.

Debido a estas limitaciones, en esta memoria proponemos la extensión del modelo borroso con cuantificadores borrosos. Esto nos permitirá aumentar de una manera muy sustancial la capacidad expresiva de los lenguajes de consulta al mismo tiempo que mantenemos o incluso mejoramos el rendimiento del modelo vectorial en la tarea

de recuperación de información básica. De este modo conseguimos el objetivo no alcanzado por otras propuestas previas, el planteamiento de lenguajes de consulta más expresivos al mismo tiempo que garantizamos un alto rendimiento. Además, de esta manera también demostramos la utilidad de las propuestas para la cuantificación borrosa que hemos realizado en los capítulos anteriores en un ámbito de aplicación de interés práctico indudable.

La utilización de cuantificación borrosa para tareas relacionadas con la recuperación de información ha sido propuesta en [9, 10] y en [47, capítulo 11], [48, 49]. En particular, los trabajos [9, 10], plantean el uso de cuantificación borrosa para ampliar la potencia de los lenguajes de consulta. Aunque el planteamiento realizado en estos trabajos es muy interesante, las propuestas sufren el problema habitual de las aproximaciones borrosas de limitarse al modelado teórico sin que haya una experimentación siguiendo los estándares de evaluación habituales en el campo.

Además, en [10] se plantea el modelado de expresiones cuantificadas mediante el método de Yager propuesto en [93, pág. 190]. Aunque el método basado en OWA es adecuado para el tratamiento de cuantificación unaria, las propuestas de Yager para el tratamiento de la cuantificación binaria presentan problemas muy serios, tal como se expuso en el apartado 1.5.2. Y la cuantificación binaria tiene mucho que decir en el campo de IR, como veremos a lo largo de este capítulo.

Por su parte, en [47–49] se realiza un planteamiento muy interesante para utilizar cuantificación borrosa en sistemas de análisis y recuperación de imágenes meteorológicas. Las propuestas realizadas en estos trabajos se alejan bastante de los intereses de esta memoria, por lo que aconsejamos al lector la consulta de las mismas para más información.

En nuestro planteamiento proponemos la utilización de cuantificación borrosa para ampliar la potencia de los lenguajes de consulta, de una manera similar a la propuesta realizada en [9, 10]. No obstante, nuestra aproximación es más poderosa. En este capítulo consideramos por primera vez la utilización de cuantificación binaria para la recuperación de información en bases de datos documentales desde un enfoque real, capaz de garantizar la validez de las propuestas. Con respecto a este punto, es muy importante recalcar que la revisión bibliográfica realizada en esta memoria ha demostrado que el problema de la cuantificación binaria es en realidad muy difícil, y que el comportamiento de la mayoría de las propuestas no es suficientemente adecuado para su utilización en aplicaciones prácticas. Por este motivo, el

problema de la utilización de cuantificación borrosa en IR no se reduce únicamente a sugerir la utilización de algún modelo, como se ha hecho en otras ocasiones, sino que es necesario además, demostrar que este modelo tiene un comportamiento teórico sólido, y a poder ser y tal como se realiza en esta memoria, comprobar también experimentalmente que el rendimiento del mismo es adecuado.

El planteamiento que hemos realizado extiende de manera natural el modelo borroso [59, 60, 75, 77], que propone la superación de las limitaciones expresivas del modelo vectorial planteando la recuperación de información mediante consultas booleanas que se evalúan mediante operadores borrosos. No obstante, la recuperación de información basada en la evaluación mediante operadores borrosos de consultas booleanas no es suficiente para abordar el problema de recuperación de la información, ya que los operadores borrosos que se utilizan en estos modelos son en general demasiado estrictos y conducen a resultados no intuitivos [64]. Al incorporar la cuantificación al modelo borroso superamos la rigidez de las consultas booleanas, incrementando de una manera muy destacable su expresividad, al mismo tiempo que mantenemos la operativa básica de este modelo.

Asimismo, nos parece muy destacable que hemos realizado experimentación a gran escala de la aproximación contra las bases de datos del TREC. La falta de experimentación de las propuestas borrosas es una de las principales críticas a las aproximaciones borrosas y una de las razones por las que todavía se consideran, en general, aportaciones menores dentro del campo de IR [2, pág. 38].

Los resultados, algunos de los cuales ya han sido presentados en algunos foros del campo de IR [34, 67], demuestran que la propuesta es muy interesante y que permite obtener en ocasiones mejoras importantes con respecto a la aproximación basada en el modelo vectorial. En todo caso, la experimentación que hemos llevado a cabo por el momento no utiliza todavía toda la potencia real del lenguaje de consultas basado en cuantificadores borrosos.

Además de presentar el modelo basado en cuantificación borrosa y los resultados experimentales, en este capítulo también vamos a realizar una pequeña revisión de algunos modelos de IR, que se relacionan con la propuesta basada en cuantificación borrosa. El modelo vectorial [2, pág. 27] tiene interés porque es el modelo de referencia del ámbito, y porque aparece como un caso particular de la aproximación que vamos a plantear cuando se utilizan los QFMs que hemos desarrollado en esta memoria. El modelo booleano [2, sección 2.5.2], el modelo booleano exten-

dido [2, sección 2.6.2], [79] y el modelo borroso [59, 60, 75, 77] manejan todos ellos una sintaxis booleana en las consultas, que es la base sobre la que superpondremos nuestro lenguaje con cuantificadores. Entre los modelos booleanos extendidos destaca el modelo p-norm [79], que presenta cierta similaridad con la cuantificación existencial y universal, pero que resulta bastante inferior a la aproximación basada en cuantificadores.

También realizaremos una pequeña introducción al campo de IR en la que estableceremos los conceptos básicos del mismo, la arquitectura de un sistema de IR típico, y los criterios que se utilizan para evaluar su rendimiento.

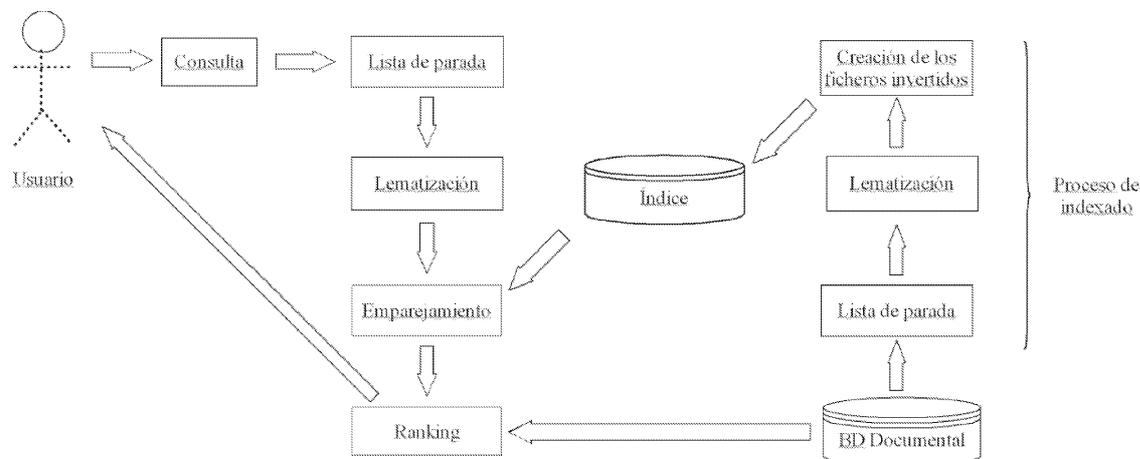
La organización del capítulo es la siguiente. Primeramente daremos una pequeña explicación acerca de la estructura de un sistema de IR. Seguidamente revisaremos el modelo vectorial, el modelo booleano y los modelos booleanos extendidos (especialmente el modelo p-norm y el modelo borroso). En el siguiente apartado formalizamos nuestra propuesta, definiendo la sintaxis de un lenguaje que incorpora cuantificadores y mostrando como se pueden evaluar las expresiones de la sintaxis. Finalizamos el apartado describiendo los experimentos que hemos realizado para contrastar el rendimiento de la aproximación.

## 5.2. Funcionamiento básico de los sistemas de recuperación de información

En este apartado vamos a describir, de manera concisa, el funcionamiento de un sistema de IR. Para más información aconsejamos al lector consultar la bibliografía específica del campo [2].

La tarea básica de IR consiste en “recuperar” el conjunto de *documentos relevantes* a una necesidad de información de un usuario de entre el conjunto de documentos almacenados en una base documental. Los usuarios tienen requerimientos de información específicos y la labor del sistema es seleccionar los documentos de la base documental que pueden ser de interés para la consulta del usuario.

Para poder acceder a las bases de documentos los sistemas de IR crean una *índice* de éstas. La función básica del proceso de indexado es almacenar eficientemente la información de la base documental. El proceso de indexado es un punto crítico en los sistemas de IR, ya que debe permitir un acceso eficiente al mismo tiempo que al-



**Figura 5.1:** Descripción de un sistema de IR.

macena suficiente información de los documentos para poder decidir adecuadamente si son o no relevantes para las consultas.

Una vez los documentos han sido indexados, es necesario definir una *función de emparejamiento o de similitud* que nos permita comparar la representación de los documentos creada en el proceso de indexación con las consultas de los usuarios. Esta función de similitud se utiliza para distinguir los documentos que el sistema considera relevantes para la consulta.

Posteriormente, el sistema debe proporcionar alguna utilidad para mostrar los documentos relevantes al usuario. Normalmente, aquellos documentos para los cuales el grado de emparejamiento es más alto se muestran antes al usuario.

En la figura 5.1 se puede ver una representación gráfica del proceso. A continuación detallamos un poco más las fases de indexación y de emparejamiento:

- **Indexación (*Indexing*).** La mayoría de los sistemas de IR utilizan directamente los *términos* de los documentos para describir el contenido de los mismos. Los términos se suelen almacenar en tablas sin duplicados, junto con algunos datos útiles, como su frecuencia en los documentos, el número total de documentos en los que aparece, etc. Lo más habitual es utilizar una estructura

de datos denominada *fichero invertido*. En un fichero invertido cada término está asociado a una lista que contiene los documentos en los que aparece.

Los ficheros invertidos son una estructura muy adecuada que permite acceder muy eficientemente a los documentos en los que aparece un determinado término. En general, los modelos de IR están diseñados para determinar qué documentos son relevantes basándose únicamente en los registros del fichero invertido asociados a los términos que aparecen en la consulta.

Generalmente no resulta útil almacenar todos los términos de la base de datos documental. Normalmente se preprocesan los documentos eliminando los términos poco significativos y reduciendo los términos de significado similar a su raíz gramatical:

- **Lista de parada (*Stop word processing*)**. Como es de esperar no todos los términos de los documentos van a ofrecer información importante. Ciertos términos, como las preposiciones, los pronombres, los artículos, etc. pertenecerán invariablemente a todos los documentos de la base documental, por lo que en la organización básica de los sistemas de IR que se ha planteado no van a ser útiles<sup>2</sup>. Por esta razón, se suelen almacenar los términos más habituales en una *lista de parada*, para ser descartados en la construcción del índice.
  - **Lematización (*Stemming*)**. Habitualmente, es posible aumentar el rendimiento de los sistemas unificando las palabras similares a una forma común. Una técnica muy habitual es reducir los términos de los documentos a su raíz. Por ejemplo, las palabras “*música, músico, musical, musicomanía*” serán reducidas a su lema “*music*”. Esto reduce además el tamaño del fichero invertido
- 
- **Emparejamiento (*Matching*)**. Una vez hemos indexado la base de datos documental hay que definir la estructura de las consultas y la función de emparejamiento que nos va a permitir comparar las mismas con los documentos. La función de emparejamiento está relacionada con la información indexada que mantenemos. Existen multitud de modelos para definir la función de emparejamiento entre un documento y una consulta. En la revisión de modelos

---

<sup>2</sup>En general el proceso de indexado basado en ficheros invertidos considera los documentos como conjuntos de términos, por lo que descarta gran parte de la información contenida en los documentos. Aunque esta representación simplificada es muy burda, en la práctica ofrece buenos resultados y es muy eficiente.

de IR en la sección 5.3 mostraremos algunos de ellos.

En general los sistemas de IR no son capaces de seleccionar exactamente los documentos relevantes para las consultas. Las consultas, ya vengán expresadas en lenguaje natural o mediante algún lenguaje de consulta apropiado, pocas veces especifican los requerimientos de información de manera adecuada. Muchas veces los propios usuarios no saben exactamente “qué están buscando” y las consultas resultan vagas e imprecisas. Por otra parte, los sistemas de IR están muy lejos de poder interpretar adecuadamente cuales son los requerimientos de información de los usuarios. La definición de lenguajes de consulta que nos permitan expresar de una manera más natural las necesidades de información de los usuarios, así como la definición de funciones de emparejamiento adecuadas son problemas muy importantes en el campo de IR. Creemos que estas dos tareas se ven beneficiadas por la propuesta basada en cuantificadores borrosos que vamos a presentar en este capítulo.

### 5.2.1. Evaluación en recuperación de la información

Para poder evaluar la calidad de un sistema de IR se suele contrastar el funcionamiento del mismo contra colecciones de documentos estándar, diseñadas especialmente para esta labor. En el caso de la tarea de IR básica estas colecciones consisten en una base de datos documental, un conjunto de consultas referentes a dicha base de datos documental, y una selección de los documentos que son considerados relevantes para cada consulta o *juicios de relevancia*. Los documentos y las consultas de las colecciones de test se encuentran expresadas en lenguaje natural.

Un ejemplo de colecciones estándar son las bases de datos documentales del TREC [54]. Las colecciones del TREC han conseguido una gran aceptación para evaluar sistemas de IR desde sus inicios a principios de los noventa. En particular, en la experimentación de nuestra propuesta para IR basada en cuantificadores borrosos, hemos utilizado una colección perteneciente al TREC. En la comunidad de IR se asume que el comportamiento de una estrategia de recuperación es adecuada cuando la misma presenta un rendimiento alto sobre un conjunto amplio de condiciones experimentales. Las bases de datos del TREC están formadas por colecciones grandes de documentos (la que hemos utilizado en nuestros experimentos contiene 173.000 artículos) por lo que es esperable que si una propuesta presenta un rendimiento adecuado contra estas bases de datos documentales también se comporte bien en

otras situaciones.

Cuando evaluamos un sistema de IR contra una colección estándar éste debe, primeramente, preprocesar la base de datos documental y las consultas de la colección para adaptarlos a la estructura de representación interna del mismo. Una vez finalizada esta tarea el sistema calculará el valor de similaridad entre la representación de las consultas y la representación de cada documento. Este valor se utiliza posteriormente para ordenar la base documental en función de la proximidad de los documentos a cada consulta en cuestión.

Sobre esta ordenación se utilizan los juicios de relevancia para comparar los resultados del sistema contra el conjunto de respuesta ideal formado por los documentos especificados en los juicios de relevancia.

Para analizar el rendimiento de un sistema de IR se han propuesto diferentes medidas. Las medidas de evaluación más ampliamente utilizadas son los índices de *precisión* y de *exhaustividad*<sup>3</sup> [2, pág. 75]. El índice de precisión mide la proporción de los documentos devueltos por el sistema que son relevantes; mientras que el índice de exhaustividad mide la proporción de documentos relevantes recuperados sobre el número total de documentos relevantes de la base documental. Formalmente, denotando por  $R$  el conjunto de documentos relevantes para una consulta dada, y por  $A$  el conjunto de documentos proporcionado por el sistema de IR, la precisión y la exhaustividad se definen como sigue:

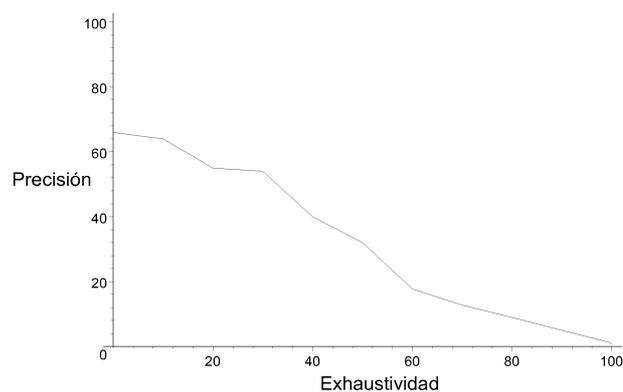
$$\begin{aligned} \text{precisión} &= \frac{|A \cap R|}{|A|} \\ \text{exhaustividad} &= \frac{|A \cap R|}{|R|} \end{aligned}$$

Tomadas conjuntamente las medidas de precisión y exhaustividad permiten medir la capacidad de los sistemas de IR para recuperar los documentos relevantes y descartar los no relevantes.

La salida de los sistemas de recuperación modernos es un ranking de documentos ordenado decrecientemente en función de la similaridad. Generalmente, la precisión de los sistemas se reduce al ampliar el subconjunto de documentos recuperados mientras que la exhaustividad aumenta. Intuitivamente, cuando aumentamos la cantidad de documentos recuperados aumentamos la cantidad de documentos relevantes recuperados pero degradamos la precisión al estar considerando documentos con menores

---

<sup>3</sup> “*Precision*” y “*recall*” en inglés.



**Figura 5.2:** Ejemplo de una figura *precisión/exhaustividad*.

niveles de similitud y por lo tanto, con menor probabilidad de pertenecer a los documentos relevantes.

Una de las técnicas más habituales para evaluar o comparar la calidad de los sistemas de IR es utilizar una gráfica *precisión/exhaustividad*. En este tipo de gráficas se representa en el eje de abscisas los niveles de exhaustividad, y en el de ordenadas la precisión del sistema para los distintos niveles de exhaustividad. Normalmente en las gráficas *precisión/exhaustividad* se utilizan únicamente once niveles de exhaustividad (0%, 10%, ..., 100%) y se interpolan los resultados para valores intermedios. Las gráficas *precisión/exhaustividad* se pueden utilizar para analizar consultas individuales o para analizar el sistema global, tomando la media de los resultados individuales.

En la figura 5.2 se muestra una gráfica *precisión/exhaustividad*. Vemos que según aumentamos la exhaustividad (es decir, la proporción de documentos recuperados por el sistema) la precisión se degrada.

También es muy interesante el cálculo de una medida única que resuma la información de las figuras de *precisión/exhaustividad*. Una medida ampliamente utilizada es el valor medio de los resultados obtenidos para los once niveles de exhaustividad (precisión media para los niveles de exhaustividad estándar).

### 5.3. Revisión de algunos modelos de IR

En este apartado se realiza una pequeña revisión de algunos de los modelos de IR más relacionados con nuestra propuesta basada en cuantificación borrosa.

El modelo vectorial [2, pág. 27] es sin duda el más conocido y el más utilizado en el campo de IR. En relación con este modelo es muy importante que nuestra propuesta lo incluya como caso particular para los QFMs que se han planteado en esta memoria, por lo que siempre vamos a poder garantizar los resultados que proporciona el modelo vectorial.

Los modelos booleano [2, sección 2.5.2], booleano extendido [2, sección 2.6.2], [79] y borroso [59, 60, 75, 77] intentan todos ellos superar las limitaciones expresivas del modelo vectorial planteando la recuperación de información mediante consultas booleanas, pero adolecen de que su rendimiento es sensiblemente inferior al del modelo vectorial. De esta manera la mejora en la expresividad del lenguaje de consultas se ve mermada debido a la pérdida de rendimiento de los modelos.

El modelo p-norm [79] es un modelo booleano extendido bastante interesante, basado en operaciones n-arias, que muestra cierta similitud con la cuantificación borrosa existencial y universal. No obstante, veremos que también presenta ciertas limitaciones, además de tener una capacidad expresiva bastante inferior a la de la propuesta basada en cuantificadores.

De aquí en adelante vamos a representar por  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_r\}$  el conjunto de documentos que componen la base de datos documental, y por  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_m\}$  el conjunto de todos los términos que aparecen en los documentos de  $\mathcal{D}$ .

A excepción del modelo vectorial, todos los modelos que se describen permiten la realización de consultas basadas en operadores booleanos.

Dada una consulta  $q$ , vamos a denotar por  $Sm(q)$  la función que asocia a una expresión de consulta la semántica de la misma. Por ejemplo, para el modelo booleano, la semántica de una consulta estará formada por el conjunto nítido de documentos que cumplen la misma. En general, la definición específica de esta función depende del modelo.

### 5.3.1. Modelo booleano

Básicamente, un sistema de IR booleano [2, sección 2.5.2] permite la realización de consultas utilizando operadores booleanos ( $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ )<sup>4</sup>. En un sistema de IR booleano, a cada posible término de consulta  $t \in \mathcal{T}$  se le asocia el conjunto de documentos nítido representativo del mismo (usualmente el conjunto de documentos tales que  $t \in d$ ); y el conjunto de documentos de respuesta a una consulta dada se construye implementando las operaciones asociadas a los operadores booleanos. Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular la respuesta a la consulta  $q = t_i \vee \neg t_j$ ; entonces la función característica del conjunto de respuesta  $Sm(q) = Sm(t_i \vee \neg t_j)$  se define como

$$\chi_{Sm(q)}(d) = \chi_{Sm(t_i \vee \neg t_j)}(d) = \chi_{Sm(t_i)}(d) \vee \neg \chi_{Sm(t_j)}(d), d \in \mathcal{D}$$

es decir, el documento  $d$  pertenece al conjunto de respuesta si  $d \in Sm(t_i)$  ( $d$  pertenece al conjunto de documentos que contienen al término  $t_i$ ) o  $d \notin Sm(t_j)$  (esto es,  $d$  no contiene el término  $t_j$ ).

Los sistemas booleanos han gozado de cierta popularidad en el campo de IR; e incluso muchos de los sistemas iniciales implementaban esta aproximación. Pero como se menciona en [79] los sistemas de IR booleanos presentan desventajas importantes que limitan su aplicación. Entre estas cabe mencionar:

- El tamaño del conjunto de respuesta es muy difícil de controlar. Una consulta poco restrictiva tendrá un conjunto de respuestas excesivamente amplio, mientras que una consulta demasiado restrictiva no devolverá ningún documento.
- El modelo no incluye ninguna ordenación del conjunto de respuesta. Todos los documentos recuperados son igualmente importantes.
- Relacionado con el punto anterior, no se incluyen pesos no binarios en los términos de los documentos ni en los términos de las consultas. Los conjuntos con los que se trabaja son nítidos.
- Las consultas booleanas pueden producir resultados poco intuitivos. Por ejemplo, ante la consulta " $t_1 \vee t_2 \vee \dots \vee t_k$ " se considera tan importante un documento que contenga sólo el término  $t_1$  como un documento que contenga todos los términos  $t_1, \dots, t_k$ .

---

<sup>4</sup>En la notación habitual en IR se denotan estos operadores por **and**, **or** y **not**.

Además, es reconocida la dificultad y la poca predisposición de los usuarios a plantear consultas en sintaxis booleana.

### 5.3.2. Modelo vectorial

El modelo vectorial [2, pág. 27] es posiblemente el modelo de recuperación de información más conocido. Pese a ser uno de los primeros modelos planteados para IR el rendimiento del mismo sigue siendo excelente, sobre todo cuando se utilizan esquemas de pesado que tienen en cuenta la longitud de los documentos [82, 84].

En el modelo vectorial cada documento y cada consulta se representan como vectores en un espacio  $m$ -dimensional definido por el vocabulario existente, y se asignan pesos no binarios a los términos de la consulta y de los documentos. Estos pesos se utilizan, posteriormente, para calcular *el grado de similitud* entre la consulta y cada documento de la base documental. Ordenando los grados de similitud decrecientemente obtenemos un ranking que contiene en las posiciones más altas aquellos documentos que presentan un mayor grado de similitud con la consulta en cuestión.

A diferencia del modelo booleano, el modelo vectorial permite considerar documentos que sólo verifican los términos de la consulta parcialmente (esto es, un término de la consulta puede tener un peso menor que 1 en un documento, al considerar este modelo pesos no binarios). Además, con el modelo vectorial es posible controlar el tamaño del conjunto de respuesta, ya que podemos seleccionar la parte del ranking que nos interese.

La idea del modelo vectorial se basa en considerar las consultas y los documentos como vectores, y medir la similitud entre estos vectores calculando una medida de correlación entre los mismos, como por ejemplo<sup>5</sup>

$$\text{sim}(q, d_j) = \frac{\vec{q} \cdot \vec{d}_j}{|\vec{q}| |\vec{d}_j|} \quad (5.1)$$

---

<sup>5</sup>Nótese que

$$\frac{\vec{q} \cdot \vec{d}_j}{|\vec{q}| |\vec{d}_j|} = \cos(\widehat{q, d_j})$$

Es decir, la medida de similitud es 1 para vectores con la misma dirección y sentido, y 0 para vectores ortogonales.

donde  $q$  es una consulta,  $d_j \in \mathcal{D}$  un documento de la base documental, y  $\vec{q}$  y  $\vec{d}_j$  los vectores asociados a  $q$  y  $d_j$  respectivamente.

El factor  $|\vec{q}|$  es constante para todos los documentos por lo que no afecta al ranking. El factor  $|\vec{d}_j|$  proporciona una normalización dependiente de la longitud de los documentos. No obstante, otras normalizaciones avanzadas se suele plantear dentro del esquema de pesado  $tf/idf$ , que es la manera más habitual de calcular los pesos.

El factor  $tf$  o frecuencia directa de un término  $t$  es una medida dependiente de cada documento (o de cada consulta) que asocia a cada documento  $d_j$  un valor que intenta predecir la medida en que  $d_j$  trata el concepto designado por el término  $t$ . Denotemos por  $f_{i,j}$  la frecuencia del término  $t_i$  en el documento  $d_j$  (es decir, el número de veces que aparece el término  $t_i$  en el documento  $d_j$ ). Una definición normalizada muy habitual del factor  $tf$  del término  $t_i$  en el documento  $d_j$  es

$$tf_{i,j} = \frac{f_{i,j}}{\max_{t_k \in d_j} f_{k,j}} \quad (5.2)$$

donde  $\max_{t_k \in d_j} f_{k,j}$  denota la mayor frecuencia de los términos del documento  $d_j$ . Este parámetro se utiliza para normalizar el factor  $tf$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Aunque normalmente el  $tf$  no se normaliza presentamos su versión normalizada debido a que, en el caso borroso, necesitaremos que los pesos pertenezcan al intervalo  $[0, 1]$ .

El factor  $tf$  se basa pues en la suposición de que cuantas más veces aparece un término en un documento, más descriptivo es éste del tema tratado por el documento en cuestión.

El factor  $idf$  o frecuencia inversa es una medida de calidad de los términos, en el sentido de que los términos que pertenecen a muy pocos documentos tienen mucha calidad por ser muy discriminativos mientras que los términos que pertenecen a muchos documentos son de poca calidad porque difícilmente nos permitirán distinguir los documentos relevantes de los irrelevantes de la base documental. El factor  $idf$  de un término  $t_i$  se define habitualmente como

$$idf_i = \log \frac{N}{n_i} \quad (5.3)$$

donde  $N$  es el tamaño total de la base de datos documental y  $n_i$  es el número de documentos que contienen al término  $t_i$ .

Podemos normalizar el factor  $idf$  en el intervalo  $[0, 1]$  dividiendo por  $\log N$

$$idf_i = \frac{\log \frac{N}{n_i}}{\log N} = \frac{\log N - \log n_i}{\log N}$$

De esta manera, el  $idf$  de un término valdrá 0 si éste pertenece a todos los documentos de la base documental, mientras que valdrá 1 en el caso de que únicamente pertenezca a un documento.<sup>6</sup>

Para calcular el peso de los términos multiplicamos el  $tf$  por el  $idf$ . Así,

$$w_{i,j} = tf_{i,j} \cdot idf_i$$

Esta expresión también se puede utilizar para calcular el peso de los términos de las consultas.

Conjuntamente, las medidas  $tf/idf$  son una herramienta muy poderosa. Mediante el factor  $idf$  medimos la calidad de los términos para diferenciar los documentos mientras que con el factor  $tf$  medimos la relación de los términos particulares con los documentos de la base de datos documental.

Aunque el esquema de pesado  $tf/idf$  ha sido muy efectivo en colecciones tempranas, actualmente se acepta que este esquema de pesado no es óptimo [82]. Cuando la longitud de los documentos de las colecciones es muy variable se hace necesario el empleo de técnicas que permitan normalizar los pesos de acuerdo con la longitud de estos. En este sentido, la normalización por pivote [84] es un método de alto rendimiento que ha demostrado sus méritos bajo condiciones de experimentación exhaustivas contra las bases de datos del TREC [82]. También es muy destacable que las aproximaciones basadas en normalización por pivote han demostrado su utilidad para recuperación de información en la web [55, 83, 85].

El esquema de pesado normalizado por longitud plantea la siguiente normalización del  $tf$  de un término [82]

$$tf_{i,j} = \frac{1 + \ln(1 + \ln(f_{i,j}))}{(1 - s) + s \frac{dl_j}{avg_{dl}}} \quad (5.4)$$

donde  $s$  es una constante (el pivote) perteneciente al intervalo  $[0, 1]$ ,  $dl_j$  es la longitud del documento  $j$  y  $avg_{dl}$  la longitud media de los documentos de la base documental.

<sup>6</sup>De igual manera que para el factor  $tf$ , la normalización no es estrictamente necesaria para el modelo vectorial, pero sí nos va a hacer falta cuando planteemos el modelo basado en cuantificadores borrosos, que necesita que los pesos pertenezcan al intervalo  $[0, 1]$ .

Resultados experimentales indican un valor óptimo de  $s$  en torno a 0,2, valor que goza además de bastante estabilidad.

Dividiendo la expresión 5.4 por

$$\frac{1 + \ln(1 + \ln(maxdl))}{1 - s} \quad (5.5)$$

donde  $maxdl$  es la longitud del mayor documento de la base documental, conseguimos que el  $tf$  normalizado por longitud pertenezca al intervalo  $[0, 1]$ .

A pesar de su simplicidad y de su ligera componente teórica, el modelo vectorial presenta un rendimiento excelente. Aunque se han comparado multitud de alternativas con el modelo vectorial la opinión mayoritaria es que el modelo vectorial es mejor (o por lo menos casi tan bueno) como cualquier otra alternativa. Además, el modelo vectorial es sencillo y eficiente. Por esta razón el modelo vectorial es uno de los modelos de recuperación de información más populares [2, pág. 30].

Como contrapartida, el modelo vectorial no permite de forma directa la realización de consultas estructuradas. Veremos más adelante que nuestra aproximación permite la realización de consultas más elaboradas al mismo tiempo que mantiene la potencia del modelo vectorial.

### 5.3.3. Modelo booleano extendido

El modelo booleano extendido (EBM)<sup>7</sup> [79] preserva la estructura subyacente al modelo booleano al mismo tiempo que incorpora pesos en los documentos y las consultas. El EBM representa un compromiso entre la rigurosidad del modelo booleano clásico y la falta de estructura del modelo vectorial. En este apartado vamos a explicar el EBM básico [79]. Más adelante explicaremos el modelo p-norm, que es la generalización n-aria de este modelo, y el modelo borroso, que es un caso particular de los EBMs en el que se modelan las operaciones booleanas con operadores borrosos.

La estructura sintáctica de las consultas del EBM básico es la misma que la del modelo booleano clásico. Para definir la semántica de los operadores del EBM se relajan las definiciones del modelo booleano. El operador de conjunción ( $\wedge^{EBM}$ ) se modela mediante una medida de distancia decreciente al par  $(1, 1)$ , de manera que

<sup>7</sup> “*Extended boolean model*” en inglés.

$\wedge^{EBM}(1, 0)$  y  $\wedge^{EBM}(0, 1)$  son valores pequeños pero no 0. El operador de disyunción ( $\vee^{EBM}$ ) se modela mediante una medida de distancia creciente al par  $(0, 0)$ , de manera que  $\vee^{EBM}(1, 0)$  y  $\vee^{EBM}(0, 1)$  son valores grandes pero no 1. La consecuencia de esta relajación es que la coherencia con las operaciones lógicas clásicas deja de cumplirse.

En [79] se realizan distintas propuestas para definir los operadores  $\wedge^{EBM}$  y  $\vee^{EBM}$ . Una posibilidad es

$$\begin{aligned}\vee^{EBM}(x_1, x_2) &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \\ \wedge^{EBM}(x_1, x_2) &= 1 - \sqrt{\frac{(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2}{2}}\end{aligned}\tag{5.6}$$

El operador  $\wedge^{EBM}(x_1, x_2)$  decrece al aumentar la distancia del par  $(x_1, x_2)$  al punto  $(1, 1)$ . Por su parte, el operador  $\vee^{EBM}(x_1, x_2)$  se incrementa al aumentar la distancia del par  $(x_1, x_2)$  al punto  $(0, 0)$ . Nótese que,

$$\begin{aligned}\vee^{EBM}(0, 0) &= 0, \vee^{EBM}(1, 1) = 1 \\ \vee^{EBM}(0, 1) &= \vee^{EBM}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71 \\ \wedge^{EBM}(0, 0) &= 0, \wedge^{EBM}(1, 1) = 1 \\ \wedge^{EBM}(0, 1) &= \wedge^{EBM}(1, 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,29\end{aligned}$$

De esta manera el valor de  $\vee^{EBM}(0, 1) = \vee^{EBM}(1, 0)$  es alto pero no 1 mientras que el valor de  $\wedge^{EBM}(0, 1) = \wedge^{EBM}(1, 0)$  es pequeño pero no 0. Así, con estos operadores se intentan evitar los problemas de los operadores booleanos clásicos, cuyo resultado para una consulta conjuntiva es 0 con tal de que uno sólo de los operandos valga 0; y 1 en una consulta disyuntiva con tal de que uno sólo de los operadores valga 1.

En la expresión 5.6 se pueden incorporar pesos de la siguiente manera

$$\vee^{EBM}(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{w_1^2 x_1^2 + w_2^2 x_2^2}{w_1^2 + w_2^2}}\tag{5.7}$$

$$\wedge^{EBM}(x_1, x_2) = 1 - \sqrt{\frac{w_1^2 (1-x_1)^2 + w_2^2 (1-x_2)^2}{w_1^2 + w_2^2}}\tag{5.8}$$

donde  $w_1$  es el peso asociado a  $x_1$  y  $w_2$  es el peso asociado a  $x_2$ . Supongamos la consulta  $(t_1, 1) \vee (t_2, 0,7)$ , donde  $t_1, t_2$  son los términos de consulta y los valores 1 y 0,7 sus pesos asociados (intuitivamente,  $t_1$  es muy importante y  $t_2$  bastante importante). Entonces, para evaluar esta consulta para un documento  $d$  para el cual los pesos asociados a los términos  $t_1, t_2$  son 1, 0,7 utilizaríamos la expresión 5.7.

En [79] también se plantea la siguiente generalización de los operadores anteriores:

$$\begin{aligned}\vee^{EBM,p}(x_1, x_2) &= \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p}{2}} \\ \wedge^{EBM,p}(x_1, x_2) &= 1 - \sqrt[p]{\frac{(1-x_1)^p + (1-x_2)^p}{2}}\end{aligned}$$

Nótese que cuando  $p$  tiende a infinito se cumple ([79, pág. 1025])

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \vee^{EBM,p}(x_1, x_2) &= \frac{\text{máx}(w_1 x_1, w_2 x_2)}{\text{máx}(w_1, w_2)} \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \wedge^{EBM,p}(x_1, x_2) &= 1 - \frac{\text{máx}(w_1(1-x_1), w_2(1-x_2))}{\text{máx}(w_1, w_2)}\end{aligned}$$

La principal debilidad del modelo booleano extendido es que los operadores que se plantean no son asociativos. El no cumplimiento de esta propiedad es muy problemático, ya que es esperable que el rendimiento de un sistema de IR no sea dependiente del orden de los términos en la consulta [64]. Por ejemplo, en la evaluación de:

$$1 \vee^{EBM} 0,9 \vee^{EBM} 0,8 \vee^{EBM} 0,7 \vee^{EBM} 0,6 \vee^{EBM} 0,5$$

se obtienen distintos resultados en función de si se utiliza asociatividad por la derecha o por la izquierda. Utilizando asociatividad por la derecha obtenemos:

$$\vee^{EBM}(\vee^{EBM}(\vee^{EBM}(\vee^{EBM}(\vee^{EBM}(1, 0,9), 0,8), 0,7), 0,6), 0,5) = 0,91$$

mientras que si utilizamos asociatividad por la izquierda obtenemos:

$$\vee^{EBM}(1, \vee^{EBM}(0,9, \vee^{EBM}(0,8, \vee^{EBM}(0,7, \vee^{EBM}(0,6, 0,5)))) = 0,61$$

Es decir, obtenemos resultados completamente distintos para el mismo conjunto de pesos. La no asociatividad de los operadores es un inconveniente muy grave del modelo que acabamos de presentar.

Por otra parte, la incorporación de pesos también puede plantear problemas. Para el caso en que  $w_1 = w_2 = 0$  las expresiones 5.7 y 5.8 están indefinidas. Aunque este problema pueda parecer poco importante, en ocasiones puede ser interesante el cálculo de los pesos de manera automática, y en este caso podría ocurrir que  $w_1 = w_2 = 0$ .

#### 5.3.4. Modelo borroso

Los modelos borrosos [59, 60, 75, 77] son EBMs en los cuales las consultas booleanas se modelan mediante operadores borrosos. Así, la conjunción se modelará por una tnorma, la disyunción mediante una tconorma y la negación mediante una función de negación borrosa. Por ejemplo, a la consulta  $q = t_i \vee \neg t_j$  le asociaremos un conjunto borroso  $Sm(q) = Sm(t_i \vee \neg t_j) \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$  definido a partir de su función de pertenencia como

$$\mu_{Sm(q)}(d) = \mu_{Sm(t_i \vee \neg t_j)}(d) = \mu_{Sm(t_i)}(d) \vee \tilde{\mu}_{Sm(t_j)}(d), d \in \mathcal{D}$$

donde  $\vee$  se modela mediante una tconorma (por ejemplo el máximo o la suma probabilística) y  $\tilde{\mu}$  mediante una función de negación borrosa (por ejemplo la negación estándar).

Para el cálculo del conjunto borroso de documentos asociado a un término  $Sm(t_i)$  se puede utilizar, por ejemplo, el esquema de pesado *tf/idf*.

Aunque el planteamiento del modelo borroso parece razonable, en la práctica su rendimiento es muy pobre. En una consulta conjuntiva un único término de peso 0 ocasionará que el grado de cumplimiento asociado a la misma sea 0, mientras que en una consulta disyuntiva un único término de peso 1 ocasionará que el grado de cumplimiento sea 1. Numéricamente:

$$\begin{aligned} 1 \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 \wedge 0 &= 0 = 0 \wedge 0 \wedge \dots \wedge 0 \wedge 0 \\ 1 \vee 1 \vee \dots \vee 1 \vee 1 &= 1 = 1 \vee 0 \vee \dots \vee 0 \vee 0 \end{aligned}$$

De este modo el modelo borroso presenta problemas muy similares a los del modelo booleano clásico.

En [65] se intentan solucionar estos problemas mediante la utilización de operadores compensatorios [109]. Los operadores compensatorios son operadores intermedios entre las tnormas y las tconormas, pero sufren el inconveniente de no ser asociativos.

Por esta razón los modelos basados en operadores compensatorios tienen problemas similares a los del modelo booleano extendido básico.

### 5.3.5. Modelo p-norm

El modelo *p-norm* [79, pág. 1024] se propone como la extensión m-aria del modelo booleano extendido básico explicado en el apartado 5.3.3. En el modelo *p-norm* se definen el operador disyuntivo m-ario  $\vee^{pnorm,p} : \mathbf{I}^m \rightarrow \mathbf{I}$  y el operador conjuntivo m-ario  $\wedge^{pnorm,p} : \mathbf{I}^m \rightarrow \mathbf{I}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vee^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) &= \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \dots + x_m^p}{m}} \\ \wedge^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) &= 1 - \sqrt[p]{\frac{(1-x_1)^p + \dots + (1-x_m)^p}{m}}\end{aligned}\tag{5.9}$$

con  $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{I}$ .

Las operaciones  $\vee^{pnorm,p}$  y  $\wedge^{pnorm,p}$  son en realidad medidas de distancia. La interpretación de estos operadores es la misma que la de los operadores del modelo booleano extendido básico explicado en el apartado 5.3.3.

Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(T)$  el conjunto borroso

$$X = \{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$$

Por analogía con la notación que estamos utilizando para los cuantificadores sobrecargaremos la notación de los operadores  $\vee^{pnorm,m} : \tilde{\mathcal{P}}(T) \rightarrow \mathbf{I}$  y  $\wedge^{pnorm,m} : \tilde{\mathcal{P}}(T) \rightarrow \mathbf{I}$  denotando

$$\begin{aligned}\vee^{pnorm,p}(X) &= \vee^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) \\ \wedge^{pnorm,p}(X) &= \wedge^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

Nótese que cuando  $p$  tiende a infinito se cumple que [79, pág. 1025]

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \vee^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) &= \text{máx}(x_1, \dots, x_m) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \wedge^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) &= \text{mín}(x_1, \dots, x_m)\end{aligned}$$

mientras que si  $p$  vale 1

$$\begin{aligned}\vee^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) &= \wedge^{pnorm,p}(x_1, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{m}(x_1 + \dots + x_m)\end{aligned}$$

Es decir, para valores de  $p$  altos podemos interpretar el operador  $\vee^{pnorm,p}$  como una relajación del cuantificador existencial y el operador  $\wedge^{pnorm,p}$  como una relajación del cuantificador universal. Por otra parte, para  $p = 1$ , el modelo  $p$ -norm es equivalente al modelo vectorial. Nótese además que la definición del operador  $\wedge^{pnorm,p}$  es la dual del operador  $\vee^{pnorm,p}$  para la negación estándar; es decir,

$$\wedge^{pnorm,p}(X) = \simeq \vee^{pnorm,p}(X) \simeq$$

El modelo  $p$ -norm también considera la incorporación de pesos. Sean  $w_1, \dots, w_m \in \mathbf{I}$  un conjunto de pesos para los términos  $t_1, \dots, t_m$ . Representemos por  $W \in \tilde{\mathcal{P}}(T)$  el conjunto borroso

$$W = \{w_1/t_1, \dots, w_m/t_m\}$$

El modelo  $p$ -norm para el conjunto de pesos expresado por  $W$  se define como:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \vee^{pnorm,p}(W, X) &= \sqrt[p]{\frac{w_1^p x_1^p + \dots + w_m^p x_m^p}{w_1^p + \dots + w_m^p}} \\ \wedge^{pnorm,p}(W, X) &= 1 - \sqrt[p]{\frac{w_1^p (1-x_1)^p + \dots + w_m^p (1-x_m)^p}{w_1^p + \dots + w_m^p}} \end{aligned}$$

Nótese que para  $W = \emptyset$  las expresiones anteriores no están definidas.

En [79, pág. 1025, nota a pie de página] se explica que los pesos utilizados en el modelo booleano extendido son pesos relativos en vez de pesos absolutos. Por pesos relativos se entiende que la importancia de los pesos es relativa a la del resto de los pesos de la consulta.

Cuando  $p$  tiende a infinito se cumple ([79, pág. 1025])

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \vee^{pnorm,p}(W, X) &= \frac{\text{máx}(w_1 x_1, \dots, w_m x_m)}{\text{máx}(w_1, \dots, w_m)} \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \wedge^{pnorm,p}(W, X) &= 1 - \frac{\text{máx}(w_1 (1-x_1), \dots, w_m (1-x_m))}{\text{máx}(w_1, \dots, w_m)} \end{aligned}$$

Además, de igual manera que para el caso unario,

$$\wedge^{pnorm,p}(W, X) = \simeq \vee^{pnorm,p}(W, X) \simeq$$

Aunque el planteamiento del modelo  $p$ -norm es razonable también presenta algún problema:

<sup>8</sup>Se está reescribiendo las expresiones planteadas en [79, pág. 1025] en notación conjuntista.

- En primer lugar, consideramos que el modelo *p-norm* no es adecuado para realizar consultas interactivas. Muchos usuarios tienen dificultades para formular consultas booleanas, y las consultas expresables mediante el modelo *p-norm* son bastante más complejas. Por lo tanto, parece necesario que el modelo *p-norm* se utilice de una manera automática, mediante algún procedimiento que nos permita transformar las consultas de los usuarios a una representación adecuada para su procesamiento automático mediante este modelo.
- Cuando se utilizan pesos, si el vector de pesos  $W$  es  $\mathbf{0}$  ( $W = \mathbf{0}$ ) entonces  $\vee^{pnorm,p}$  y  $\wedge^{pnorm,p}$  están indefinidos. Aunque esto pueda parecer un problema menor, si los pesos se calculan de manera automática este caso puede ser posible.
- Cuando se utilizan pesos y el parámetro  $p$  tiende a infinito el modelo *p-norm* puede presentar grandes variaciones ante pequeñas modificaciones de los pesos. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$X = \{0/t_1, 0/t_2, 1/t_3\}$$

$$W = \{0,01/t_1, 0,01/t_2, 0/t_3\}$$

$$W' = \{0,01/t_1, 0,01/t_2, 0,01/t_3\}$$

Entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \vee^{pnorm,p}(W, X) = \frac{\text{máx}(0,01 \cdot 0, 0,01 \cdot 0, 0 \cdot 1)}{\text{máx}(0,01, 0,01, 0,0)} = 0,0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \vee^{pnorm,p}(W', X) = \frac{\text{máx}(0,01 \cdot 0, 0,0 \cdot 0, 0,01 \cdot 1)}{\text{máx}(0,01, 0,01, 0,01)} = 1,0$$

Aunque hemos visto que el modelo *p-norm* es susceptible de alguna crítica (al menos en el caso en el que se incluyen pesos en los términos de las consultas), resulta una aproximación muy interesante. No obstante el modelo *p-norm* no es, ni mucho menos, estándar en los sistemas de IR actuales.

Quizás no haya pasado inadvertido que hemos adaptado el modelo *p-norm* a la notación utilizada en esta memoria. De esta manera hemos podido subrayar las similitudes entre la cuantificación universal y existencial y las definiciones subyacentes al modelo *p-norm*.

La propuesta basada en cuantificación borrosa que vamos a desarrollar a lo largo de la siguiente sección es mucho más expresiva y natural que la del modelo *p-norm* (basada en la cuantificación universal y existencial y situaciones intermedias).

Además, en nuestro caso, nos beneficiamos del sólido comportamiento teórico de los QFMs que hemos planteado en esta memoria. Por estas razones creemos que la propuesta basada en cuantificadores borrosos amplía la del modelo  $p$ -norm. A través de los cuantificadores, en el caso unario, podemos manejar las situaciones universal y existencial y también todo tipo de situaciones intermedias, incluyendo el caso del modelo vectorial para los QFMs que se definen en esta memoria. Además, veremos que la inclusión de pesos se realiza de manera natural mediante cuantificadores binarios proporcionales. En este caso, las propiedades que verifican los QFMs que hemos planteado aseguran un comportamiento adecuado de los mismos, lo cual comprobaremos también de manera experimental.

## 5.4. Utilización de cuantificación borrosa para extender el modelo borroso

En este apartado vamos a definir un lenguaje de consulta basado en el modelo borroso que incorpora cuantificación unaria y binaria. Posteriormente explicaremos como asociar significado semántico a las expresiones de dicho lenguaje tomando como base el esquema de pesado  $tf/idf$ .

Al incorporar cuantificación, el lenguaje de consulta que proponemos es mucho más expresivo que el lenguaje de consulta subyacente a los modelos que hemos analizado en la sección previa. Nos parece destacable que para algunos QFMs, y en particular para los definidos en esta memoria, el modelo incluye al vectorial. Este hecho nos permite garantizar el rendimiento de éste.

De esta manera cumplimos los dos objetivos que hemos planteado en la introducción de este capítulo:

- Por un lado se propone un lenguaje de consulta muy expresivo. Gracias al manejo de expresiones cuantificadas el lenguaje de consulta supone un salto cualitativo con respecto a los modelos que manejan consultas booleanas.
- Por otro lado, al incluir al modelo vectorial, garantizamos su rendimiento. Nótese que el principal inconveniente de los modelos booleanos y booleano extendido (tanto en su versión básica como borrosa) es que no son capaces de igualar el rendimiento del modelo vectorial.

Además, los resultados experimentales que hemos obtenido mediante la utilización de cuantificación borrosa en IR demuestran que la aproximación no es solamente capaz de igualar al modelo vectorial en la tarea de recuperación básica, sino que en ocasiones permite obtener mejoras de rendimiento importantes.

### 5.4.1. Visión borrosa de los documentos

En la exposición del modelo borroso (véase la sección 5.3.4) hemos visto que este modelo utiliza consultas booleanas que se modelan mediante operadores borrosos [59, 60, 75, 77]. A los términos de las consultas se les asocian conjuntos borrosos de documentos y las operaciones booleanas se resuelven mediante operadores borrosos (unión, intersección, negación, etc.) entre conjuntos.

De esta manera se interpreta que la semántica de un término es un conjunto borroso de documentos; es decir,  $Sm(t) \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$ . La semántica que se asocia a las consultas es a su vez un conjunto borroso de documentos (obtenido mediante la aplicación de operadores de unión, intersección y complemento borrosos), donde la pertenencia de los documentos a la consulta se utiliza para establecer el ranking de documentos asociado a la misma.

Aunque posiblemente la visión de los términos como conjuntos borrosos de documentos sea la más habitual en las aproximaciones borrosas a IR [59, 60, 75, 77], también se puede interpretar que un documento es un conjunto borroso que contiene los términos a los que hace referencia, o mejor aún, establecer la relación entre documentos y términos mediante una relación borrosa. Por ejemplo, en [10, pág. 218] se plantea esta relación a partir del *tf* y del *idf*:

$$\mu_R(d_i, t_j) = tf_i \cdot idf_j$$

Nótese que esta representación permite tanto la interpretación de los términos como conjuntos borrosos de documentos como la de los documentos como conjuntos borrosos de términos. Por ejemplo, podemos definir

$$Sm(t) = \{\mu_R(d, t) / d : d \in \mathcal{D}\}$$

pero también

$$Sm(d) = \{\mu_R(d, t) / t : t \in \mathcal{T}\}$$

Es decir, tenemos las siguientes visiones borrosas de los documentos:

- **Interpretación de los términos como conjuntos borrosos de documentos.** Desde este punto de vista el grado de pertenencia de un documento a un término  $\mu_{Sm(t)}(d)$  indica la preferencia del documento  $d$  para el tratamiento del término  $t$ . Dados dos documentos  $d_i$  y  $d_j$  entonces  $\mu_{Sm(t)}(d_i) > \mu_{Sm(t)}(d_j)$  indica que el documento  $d_i$  está más relacionado con la temática del término  $t$  que el documento  $d_j$ . La interpretación de los grados de pertenencia como preferencias ha sido explicada en la sección 2.1.
- **Interpretación de un documento como un conjunto borroso de términos.** Desde este punto de vista un documento simplemente contiene los términos o conceptos de los que trata. Bajo esta visión  $\mu_{Sm(d)}(t)$  indica en que media el término  $t$  es clave en el contexto del documento  $d$ .

La visión de los documentos como conjuntos borrosos de términos es muy interesante para poder aplicar distintas subconsultas a distintas secciones de los documentos. Por ejemplo, podemos considerar un documento como un conjunto de secciones (e.g., título, resumen, introducción, etc.) y representar la semántica de estos componentes como un conjunto borroso de términos.

En [62] se plantea la representación de los documentos como jerarquías de objetos, los cuales a su vez contienen otros objetos hasta llegar a los componentes básicos que se representan mediante conjuntos de términos; y se muestra como se puede utilizar esta visión de los documentos para la *recuperación de pasajes* utilizando la teoría de Dempster y Shafer.

Para incorporar la cuantificación en la aproximación borrosa vamos a seguir la visión tradicional, en la que se interpretan los términos como conjuntos borrosos de documentos.

### 5.4.2. Sintaxis del lenguaje de consultas

En este apartado definimos un lenguaje de consulta para IR que incorpora cuantificadores. La utilización de cuantificación para aumentar la expresividad de los lenguajes de consultas ha sido propuesta en [9, pág. 240], [10]. En [34, 35, 67] hemos utilizado una propuesta similar para evaluar la potencia real de la cuantificación borrosa en IR. La propuesta que realizamos a continuación es más poderosa que las anteriores, ya que hemos incorporado al lenguaje expresiones con cuantificación binaria.

Sea  $\mathbf{T} = \{t_1, \dots, t_m\}$  el conjunto de términos con el que estamos trabajando,  $\mathbf{Q}^1 = \{Q_{1,1}, \dots, Q_{1,r_1}\}$  un conjunto de símbolos de cuantificación asociados a cuantificadores unarios,  $\mathbf{Q}^2 = \{Q_{2,1}, \dots, Q_{2,r_2}\}$  un conjunto de símbolos de cuantificación asociados a cuantificadores binarios, y  $W$  un conjunto que especifica los pesos que se pueden utilizar en el lenguaje. Las expresiones válidas del lenguaje de consulta se definen recursivamente de la siguiente manera:

**Definición 115 (Expresiones del lenguaje de consulta (LQ)) :**

- (i) Si  $t \in \mathbf{T}$  entonces  $t$  pertenece al lenguaje de consulta ( $t \in \mathbf{LQ}$ )
- (ii) Si  $f \in \mathbf{LQ}$  entonces  $\neg f \in \mathbf{LQ}$ .
- (iii) Si  $f_1, f_2 \in \mathbf{LQ}$  entonces  $(f_1 \wedge f_2) \in \mathbf{LQ}$  y  $(f_1 \vee f_2) \in \mathbf{LQ}$ .
- (iv) Si  $Q \in \mathbf{Q}^1$  ( $Q$  es un símbolo de cuantificación unario) y  $f_1, \dots, f_m \in \mathbf{LQ}$  entonces  $Q(f_1, \dots, f_m) \in \mathbf{LQ}$ .
- (v) Si  $Q \in \mathbf{Q}^2$  ( $Q$  es un símbolo de cuantificación binario),  $f_1, \dots, f_m \in \mathbf{LQ}$  y  $w_1, \dots, w_m \in W$  son un conjunto de pesos asociados a las expresiones de consulta  $f_1, \dots, f_m$  entonces  $Q(\langle w_1, f_1 \rangle, \dots, \langle w_m, f_m \rangle) \in \mathbf{LQ}$ .

La cuantificación unaria nos permitirá establecer consultas en las que el cuantificador establece una restricción sobre el número de expresiones de consulta  $f_1, \dots, f_m$  a ser cumplidas. Intuitivamente, el significado que se va a asociar a este tipo de expresiones es:

“ $Q$  expresiones de consulta de  $f_1, \dots, f_m$  se cumplen en el documento  $d$ ”

Mediante la cuantificación binaria permitimos la aplicación de un conjunto de pesos  $w_1, \dots, w_m \in W$  para especificar la importancia de las expresiones de consulta. Así, la utilización de cuantificadores binarios se puede parafrasear como

“ $Q$  expresiones de consulta de  $f_1, \dots, f_m$   
con importancia  $w_1, \dots, w_m$  se cumplen en el documento  $d$ ”

La utilización de cuantificación binaria para establecer la importancia de los criterios a ser evaluados ha sido propuesta por Yager [93]. En [47, pág. 348] también se indica la utilidad de este tipo de expresiones en IR.

En la definición no hemos precisado los elementos que pertenecen al conjunto de pesos  $W$ .  $W$  podría ser, por ejemplo, el conjunto de valores en el intervalo  $[0, 1]$ , o también un conjunto de etiquetas que permitiesen definir la importancia relativa de

los términos (por ejemplo,  $W = \{\text{“muy importante”}, \text{“importante”}, \text{“medianamente importante”}, \text{“poco importante”}\}$ ).

No hemos considerado la utilización de pesos en las expresiones conjuntivas y disyuntivas para mantener el lenguaje más sencillo y porque la definición realizada es suficiente para las expresiones que se utilizan en la experimentación. En [10, pág. 229] se indica como asociar semántica a este tipo de expresiones<sup>9</sup>.

En [34, 35, 67] no hemos considerado la utilización de cuantificadores binarios, aunque hemos planteado su utilización como trabajo futuro. Es destacable que, con vistas a la incorporación de expresiones con cuantificación no unaria, en estos trabajos hemos enfatizado la importancia de la utilización de modelos de cuantificación de comportamiento teórico contrastado.

En el lenguaje de consulta tampoco hemos incorporado una representación estructurada de los documentos ya que, además de no haberse utilizado en la experimentación, esta representación es dependiente de la organización de los documentos con los que trabajemos. No obstante, la modificación del lenguaje para incorporar representaciones estructuradas no es difícil. Consideremos, por ejemplo, que en nuestra representación estructurada un documento se divide en cierto número de secciones  $\{\text{sección}_1, \text{sección}_2, \dots, \text{sección}_n\}$ . Entonces podemos modificar el lenguaje para que en la definición de las cláusulas se haga referencia a la parte del documento a la cual se quiere aplicar la misma. Así, **todos** ( $\{\langle w_1, t_1 \rangle, \dots, \langle w_m, t_m \rangle\}$ , introducción) indicaría que *“todos los términos  $t_1, \dots, t_m$  con importancia  $w_1, \dots, w_m$  deben estar en la introducción”*. Un ejemplo más elaborado es el siguiente:

**Ejemplo 48** Sea  $W = \{MI, I, M, PI, NI\}$  un conjunto de pesos donde *MI* se utiliza para indicar que un término es “muy importante”, *I* para indicar que es “importante”, *M* para “medianamente importante”, *PI* para “poco importante” y *NI* para “nada importante”. Además, consideremos una división estructurada de los documentos en las secciones “autores, título, resumen, palabras clave, introducción y cuerpo” (conjunto de secciones  $\{\text{autores}, \text{título}, \text{resumen}, \text{claves}, \text{intro}, \text{cuerpo}\}$ ). Se

---

<sup>9</sup>En una consulta disyuntiva se puede utilizar una tnorma para combinar un peso  $w$  con el valor de pertenencia de un término  $\mu_d(t)$  (e.g.  $w \cdot \mu_d(t)$ ). De esta manera, valores bajos de  $w$  reducen la importancia de la expresión  $w \cdot \mu_d(t)$  mientras que valores altos afectan poco a la misma. En consultas conjuntivas se puede obtener un efecto adecuado mediante funciones de implicación borrosas.

podría plantear la consulta:

$$\begin{aligned} & \mathbf{todos}(\{\langle MI, autor\_1 \rangle, \langle MI, autor\_2 \rangle\}, \text{autores}) \wedge \\ & \mathbf{casi\_todos}(\{\langle MI, clave\_1 \rangle, \langle I, clave\_2 \rangle, \langle I, clave\_3 \rangle\}, \text{claves}) \wedge \\ & \mathbf{cuantos\_mas\_mejor}(\langle MI, term\_1 \rangle, \langle I, term\_2 \rangle, \langle I, term\_3 \rangle, \text{cuerpo}) \end{aligned}$$

De este modo, las distintas subexpresiones de la consulta se aplican a distintas partes de los documentos. Así, la primera cláusula cuantificada se aplica a los autores, la segunda a las palabras claves, y la tercera al cuerpo del documento.

Nótese la naturalidad con la que se relacionan este tipo de ejemplos con la cuantificación binaria. En las cláusulas del ejemplo anterior, los términos y los pesos representan la restricción del cuantificador mientras que la sección a la que se aplica la cláusula representa el alcance del mismo. Esto es, podemos interpretar que el patrón de las expresiones cuantificadas anteriores es “ $Q T$  y  $W$  están en  $S$ ”, donde  $Q$  representa el cuantificador,  $T$  los términos a los que se aplica,  $W$  los pesos que se aplican a los mismos, y  $S$  la sección del documento en cuestión.

La definición de lenguajes de consulta sobre documentos estructurados, el planteamiento de interfaces adecuados para su manejo, y el estudio de su rendimiento son problemas abiertos muy interesantes.

### 5.4.3. Semántica del lenguaje de consultas

En este apartado estudiaremos como se puede asociar un conjunto borroso de documentos  $D \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$  a las expresiones del lenguaje de consultas que acabamos de definir. Este conjunto borroso nos permitirá ordenar los documentos de la base documental  $\mathcal{D}$  en función del cumplimiento de las expresiones de consulta.

Si en las expresiones de consulta no aparecen cuantificadores la parte semántica se define de la misma manera que en el modelo borroso (véase el apartado 5.3.4). Por ejemplo, si consideramos la expresión de consulta  $t_i \vee \neg t_j$  entonces definimos el conjunto borroso  $D = Sm(t_i \vee \neg t_j) \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$  como

$$\mu_{Sm(t_i \vee \neg t_j)}(d) = \mu_{Sm(t_i)}(d) \vee \tilde{\neg} \mu_{Sm(t_j)}(d), d \in \mathcal{D}$$

donde  $\tilde{\neg}$  es un operador de negación borrosa y  $\vee$  es una tconorma<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>La pertenencia de los símbolos  $\wedge$  y  $\vee$  a la sintaxis (i.e., expresiones de consulta) o a la semántica (i.e., operadores borrosos) es perfectamente clara a partir del contexto.

En caso de que la consulta sea atómica; esto es, que venga dada por un único término  $t_i$ , vamos a calcular el conjunto borroso  $D = Sm(t_i)$  utilizando el esquema de pesado  $tf/idf$ , normalizado o no por longitud (véase el apartado 5.3.2):<sup>11</sup>

$$\mu_D(d) = \mu_{Sm(t_i)}(d) = tf_{i,j} \times idf_i, d \in \mathcal{D}$$

Consideramos ahora el caso en el que la expresión de consulta contenga cuantificadores unarios. Sean  $f_1, \dots, f_m$  expresiones de consulta,  $Q_s \in Q^1$  un símbolo de cuantificación unario, y  $Q_s(f_1, \dots, f_m)$  la expresión de consulta en cuestión. Además, supongamos que hemos especificado la semántica de  $Q_s$  mediante un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(\{1, \dots, m\}) \rightarrow \mathbf{I}$  apropiado.

Sean  $Sm(f_1), \dots, Sm(f_m)$  los conjuntos borrosos que denotan la semántica de las expresiones  $f_1, \dots, f_m$ . Para cada documento  $d \in \mathcal{D}$  de la base documental podemos construir un conjunto borroso  $C_d : \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbf{I}$  que indica el cumplimiento de las expresiones de consulta  $f_1, \dots, f_m$ :

$$C_d = \{\mu_{Sm(f_1)}(d)/1, \dots, \mu_{Sm(f_m)}(d)/m\}$$

Sea  $\mathcal{F}$  un QFM adecuado (por ejemplo, alguno de los planteados en esta memoria). Como  $C_d$  es un conjunto borroso es posible aplicarle el cuantificador borroso  $\mathcal{F}(Q)$ . De esta manera, definimos el conjunto borroso  $D \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$  asociado a la expresión de consulta  $Q_s(f_1, \dots, f_m)$  como:

$$\mu_D(d) = \mu_{Sm(Q_s(f_1, \dots, f_m))}(d) = \mathcal{F}(Q)(C_d), d \in \mathbf{D}$$

Expresión cuya interpretación ya se explicó en el apartado anterior cuando definimos el lenguaje de consulta; esto es, “ $Q_s$  expresiones de consulta de  $f_1, \dots, f_m$  se cumplen en el documento  $d$ ”.

Consideraremos ahora la evaluación de expresiones binarias. Sea  $Q_s \in Q^2$  un símbolo de cuantificación binario y  $Q_s(\langle w_1, f_1 \rangle, \dots, \langle w_m, f_m \rangle)$  la expresión de consulta que queremos evaluar. El conjunto de pesos  $w_1, \dots, w_m$  indica la importancia de las expresiones de consulta  $f_1, \dots, f_m$ .

De igual manera que para el caso unario, construimos el conjunto borroso  $C_d$  como:

$$C_d = \{\mu_{Sm(f_1)}(d)/1, \dots, \mu_{Sm(f_m)}(d)/m\}$$

---

<sup>11</sup>Recordemos que para poder interpretar el esquema de pesado  $tf/idf$  como una función de pertenencia hay que utilizar  $tf$ s e  $idf$ s normalizados de manera que  $tf_{i,j} \times idf_i \in [0, 1]$ .

Representemos por  $W = \{w_1/1, \dots, w_m/m\}$  el conjunto de importancias de las expresiones de consulta. Sea  $Q : \mathcal{P}(\{1, \dots, m\})^2 \rightarrow \mathbf{I}$  el conjunto borroso asociado a  $Q_s$ . Definimos el conjunto borroso  $D \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{D})$  que indica el grado en que se cumplen  $Q_s$  de las expresiones  $f_1, \dots, f_m$  con importancia  $w_1, \dots, w_m$  como:

$$\mu_D(d) = \mu_{Sm(Q_s(\langle w_1, f_1 \rangle, \dots, \langle w_m, f_m \rangle))}(d) = \mathcal{F}(Q)(W, C_d)$$

donde  $\mathcal{F}$  es otra vez un QFM adecuado.

**Ejemplo 49** *Un usuario podría estar interesado en buscar documentos relativos a la cuantificación borrosa. Para ello podría plantear una consulta del siguiente tipo:*

$$\text{consulta} = \mathbf{casi\_todos} \left( \langle MI, \text{cuantificación} \rangle, \langle MI, \text{borrosa} \rangle, \langle M, \text{cardinalidad} \rangle \right)$$

Donde el símbolo *MI* indica “muy importante” y el símbolo *M* “medianamente importante”. Al símbolo *MI* le podemos asignar la importancia numérica 1 y al símbolo *M* la importancia numérica 0,5. Para calcular el resultado de esta consulta para un documento  $d \in \mathcal{D}$  hacemos

$$\begin{aligned} \mu_D(d) &= \mu_{Sm(\text{consulta})}(d) \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{casi\_todos})(\{1/1, 1/2, 0,5/3\}, \\ &\quad , \{tf_{\text{cuant...}} \cdot idf_{\text{cuant...}}/1, tf_{\text{borrosa}} \cdot idf_{\text{borrosa}}/2, tf_{\text{card...}} \cdot idf_{\text{card...}}/3\}) \end{aligned}$$

El ejemplo anterior plantea que sean los usuarios los que definan la importancia de los términos (o expresiones) utilizados en las consultas. Pero también se puede plantear la definición de las importancias de manera automática, a partir de *perfiles de usuario* (utilizados para definir los intereses de los usuarios), algún tipo de sistema de aprendizaje, a partir de la distribución de las frecuencias en la consulta textual, etc.

A continuación vamos a indicar una posibilidad que nos permitirá combinar cuantificadores binarios con el esquema de pesado  $tf/idf$ , aunque la misma presenta el inconveniente de que obliga a que las expresiones de consulta a las que se aplican los cuantificadores sean atómicas (es decir, términos). La propuesta que vamos a hacer relaciona la interpretación de las medidas  $tf/idf$  con la capacidad de la cuantificación para expresar criterios de importancia.

Hemos visto que el  $tf$  de un término es una medida particular para cada documento mientras que el  $idf$  es una medida global que depende de toda la base

documental. Consideremos una consulta plana formada por los términos  $t_1, \dots, t_m$ . Puesto que el *idf* es un factor global a toda la base documental y no particular a un documento concreto, es razonable definir el conjunto borroso  $C_{d_j}$  que representa el cumplimiento de los términos  $t_1, \dots, t_m$  por parte del documento  $d_j$  utilizando únicamente el factor *tf*; es decir,

$$\mu_{C_{d_j}}(t_i) = \frac{f_{i,j}}{\max_{t_k \in d_j} f_{k,j}} \quad (5.10)$$

o similarmente utilizando la normalización por longitud del *tf*.

La importancia de los términos de la consulta se puede calcular combinando el factor *idf* con el *tf* de la consulta. De esta manera los términos con un *idf* bajo se consideran poco importantes para la consulta en cuestión (ya que estos términos son de poca calidad) y los términos con un *idf* alto se consideran muy importantes. Definimos así,

$$\mu_{\mathbf{W}}(t_i) = \frac{f_{i,q}}{\max_{t_k \in q} f_{k,q}} \cdot \frac{\ln \frac{N+1}{n_i}}{\ln(N+1)} \quad (5.11)$$

donde  $n_i$  es el número de documentos que contienen el término  $t_i$  y  $N$  el tamaño total de la base documental.

De esta manera podemos plantear

$$\mu_{Sm(Q_s(\langle \mu_{\mathbf{W}}(t_1), t_1 \rangle, \dots, \langle \mu_{\mathbf{W}}(t_m), t_m \rangle))}(d_j) = \mathcal{F}(Q)(W, C_{d_j}) \quad (5.12)$$

Parafraseando “*Q términos importantes de la consulta se aplican a  $d_j$* ”.

En la expresión 5.10 también podemos incorporar el factor de normalización por longitud.

Hemos experimentado esta aproximación con buenos resultados, consiguiendo en algunas ocasiones pequeñas mejoras con respecto a la normalización por longitud.

En la siguiente sección describimos los resultados experimentales que hemos obtenido al utilizar el lenguaje de consulta que hemos planteado.

## 5.5. Experimentación contra las bases de datos del TREC

Una de las principales críticas de las aproximaciones borrosas a IR es que normalmente no pasan de ser propuestas teóricas, y pocas veces se plantea la evaluación de

las mismas aún a pequeña escala. Por este motivo, no nos hemos limitado a definir un modelo teórico, sino que también hemos desarrollado la implementación computacional de la propuesta para evaluar el rendimiento de ésta con experimentación a gran escala. Los primeros resultados, algunos de los cuales ya han sido presentados en [34,35,67], demuestran que la propuesta es muy interesante y que permite obtener en ocasiones mejoras importantes con respecto a las aproximaciones más clásicas.

En la experimentación hemos utilizado el corpus basado en el *Wall Street Journal* (WSJ) de la colección TREC, que contiene alrededor de 173.000 artículos de noticias que abarcan un periodo de unos seis años<sup>12</sup>, y 50 consultas del TREC-3 [54] (consultas #151-#200). Los documentos y las consultas han sido preprocesadas con una lista de parada de 571 palabras comunes y el lematizador de Porter [76]. El fichero invertido ha sido construido con la ayuda del paquete GNU mifluz [71], el cual proporciona una librería C++ que permite la construcción y consulta de ficheros invertidos.

Las consultas de la colección expresan una necesidad de información en lenguaje natural. Aparecen divididas en tres partes: *título*, *descripción* y *narrativa*. El título de la consulta es una descripción muy breve de la misma y normalmente está formada por menos de 10 términos. La descripción detalla un poco más el requerimiento de información y suele tener alrededor de 30 términos. La narrativa detalla de una manera precisa el requerimiento de información y tiene una longitud aproximada de unos 100 términos. En la figura 5.3 se representa una consulta de la base de datos del TREC.

En la experimentación hemos utilizado un proceso automático que transforma las consultas del TREC a una representación adecuada para nuestro sistema de recuperación de información basado en cuantificación borrosa. Esto quiere decir que este lenguaje de consultas no sólo podría ser usado de forma directa por los usuarios, sino que también puede generar consultas cuantificadas a partir de lenguaje natural.

En la primera serie de experimentos que hemos lanzado hemos representado las consultas del TREC por medio de una única cláusula cuantificada (i.e., con un sólo cuantificador) sin utilizar la potencia completa de nuestro lenguaje de consultas. En la segunda serie de experimentos hemos representado las consultas del TREC mediante una expresión de consulta compleja que utiliza distintos cuantificadores simultáneamente. En una tercera batería de experimentos hemos considerado el

---

<sup>12</sup>El tamaño total de la colección es de 524 Mb.

<p><b>TREC topic:</b></p> <p><b>&lt;title&gt; Topic:</b> Vitamins –The Cure for or Cause of Human Ailments</p> <p><b>&lt;desc&gt; Description:</b>  Document will identify vitamins that have contributed to the cure for human diseases or ailments or documents will identify vitamins that have caused health problems in humans:</p> <p><b>&lt;narr&gt; Narrative:</b>  A relevant document will provide information indicating that vitamins may help to prevent or cure human ailments. Information indicating that vitamins may cause health problems in humans is also relevant. A document that makes a general reference to vitamins such as “good for your health” or “having nutritional value” is not relevant. Information about research being conducted without results would not be relevant. References to derivatives of vitamins are to be treated as the vitamin.</p>
--

**Figura 5.3:** Consulta del TREC

caso de cuantificación binaria. Detallaremos más el proceso de construcción de las consultas en breve, según vayamos describiendo los distintos experimentos.

Los esquemas de pesado con los que hemos experimentado son el *tf/idf* básico y el *tf/idf* normalizado por longitud. El esquema *tf/idf* básico, aunque de rendimiento inferior al esquema *tf/idf* normalizados por longitud, es un enfoque clásico en IR. Además, las normalizaciones por longitud son interesantes cuando trabajamos con bases de datos amplias en las que las longitudes de los documentos son muy dispares, pero su uso no es tan crítico cuando las bases de datos están compuestas por documentos de una longitud homogénea.

Hemos experimentado el rendimiento de los modelos de cuantificación para los cuales es esperable un mejor rendimiento: los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  basados en alfabetos, el DFS  $\mathcal{F}^A$  y el DFS  $\mathcal{F}_{Ch}$  definido en [47, pág. 230]. De los DFSs definidos en [47] hemos elegido el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  por ser el ejemplo paradigmático de DFS estándar que no cumple la propiedad de propagación de la borrosidad. No hemos comprobado el rendimiento de los modelos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_{CX}$  porque como consecuencia del cumplimiento de la propiedad de propagación de la borrosidad, estos modelos no son adecuados para la realización de “agregaciones finas” de los resultados. En la sección 1.5 se puede encontrar más información acerca de este problema.

A continuación describimos el conjunto de experimentos realizados. Primeramente detallaremos un conjunto de experimentos en los que hemos utilizado cuantificación unaria con una representación de las consultas basada en una única cláusula cuantificada. Seguidamente describiremos una serie de experimentos en los que he-

mos utilizado cuantificación unaria y varias cláusulas cuantificadas. Finalizamos la sección describiendo como se pueden representar las consultas del TREC con cuantificadores binarios, y algunos de los resultados iniciales que hemos obtenido con esta propuesta.

### 5.5.1. Experimentación con cuantificación unaria y una única cláusula cuantificada

En la primera serie de experimentos hemos trabajado únicamente con los títulos de las consultas del TREC (típica consulta corta tipo web). Después de preprocesar las consultas, eliminando los términos de la lista de parada, y transformando los restantes a sus raíces gramaticales, construimos consultas del siguiente tipo:

$$\mathbf{casi\_todos}(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

donde **casi\_todos** es un símbolo de cuantificación que tendremos que asociar posteriormente a un cuantificador adecuado. Así, la consulta representada en la figura 5.3 se transforma en la siguiente sentencia de nuestro lenguaje de consultas:

$$\mathbf{casi\_todos}(\mathit{ailment}, \mathit{cure}, \mathit{human}, \mathit{vitamin})$$

De esta manera, la consulta planteada indicaría que los documentos que contienen a “casi todos” los términos de la consulta son relevantes.

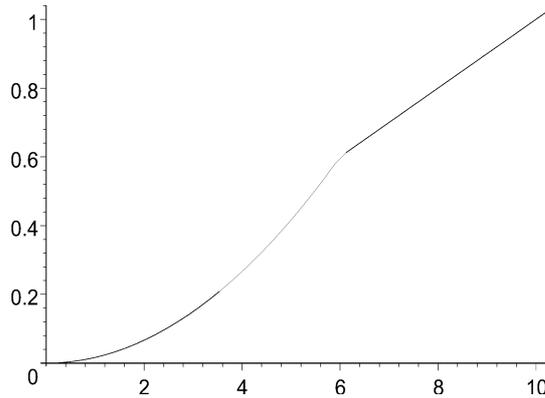
En nuestra experimentación inicial hemos comprobado el rendimiento de “versiones relajadas” del cuantificador nítido “al menos  $k$ ” [67]:

$$\mathbf{al\_menos\_k}(Y) = \begin{cases} 0 & : |Y| < k \\ 1 & : |Y| \geq k \end{cases}$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$  nítido. En nuestro caso,  $|E| = m$  es el número de términos que aparecen en la consulta.

Las intuiciones tras la definición de estas versiones relajadas del cuantificador anterior es que los documentos que contienen menos de  $k$  términos deben ser más penalizados que los que contienen al menos  $k$  términos. Para ello, establecimos el siguiente cuantificador semi-borroso:

$$\mathbf{al\_menos\_n\_relajado}(Y) = \begin{cases} \frac{|E|}{k} \left( \frac{|Y|}{|E|} \right)^2 & : |Y| < k \\ \frac{|Y|}{|E|} & : |Y| \geq k \end{cases}$$



**Figura 5.4:** Número borroso asociado al cuantificador **al\_menos\_6\_relajado**.

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$  nítido.

En la figura 5.4 se representa el cuantificador anterior para el caso  $k = 6$ . Dado un documento  $d$  que contenga  $i$  términos de la consulta, para valores de  $i$  pequeños obtendremos resultados de evaluación muy bajos. Según aumenta el valor de  $i$  la mejora por cada término de la consulta a mayores que aparece en  $d$  se hace más grande, hasta que para  $i \geq k$  la mejora se hace lineal. Intuitivamente, la utilización de este tipo de cuantificadores en una consulta penaliza los documentos que tienen pocos términos. Esto es, la mejora en el resultado de la evaluación es más pequeña cuando un documento pasa a tener de 0 a 1 términos de la consulta que cuando el documento pasa a tener de 7 a 8 términos.

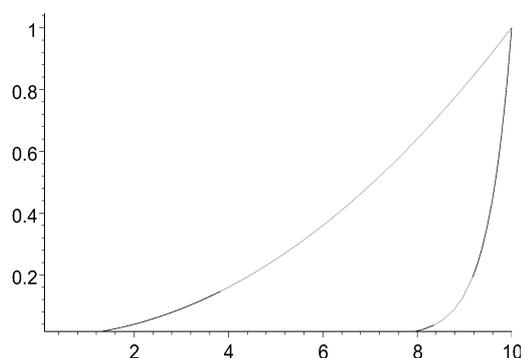
Los documentos relevantes, especialmente los largos, puede contener algunos términos de la consulta simplemente por casualidad, sin que su temática esté relacionada con los intereses del usuario. Estos cuantificadores relajados tratan de considerar esta circunstancia reduciendo su valor de similaridad.

Posteriores experimentos demostraron que la utilización de funciones potenciales y exponenciales ofrece rendimientos superiores a los de las funciones “al menos  $k$ ”. Las definiciones que hemos utilizado son las siguientes:

$$\mathbf{potencial\_k}(Y) = \left( \frac{|Y|}{|E|} \right)^k$$

$$\mathbf{exponencial\_k}(Y) = \frac{e^{k \cdot |Y|}}{e^{k \cdot |E|}}$$

para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$  nítido.



**Figura 5.5:** Números borrosos asociados a los cuantificadores **potencial\_2** y **exponencial\_2**.

La intuición tras estas definiciones sigue siendo la misma que la del cuantificador “al menos  $k$  relajado”. Nótese que la pendiente de estos cuantificadores indica cuánto queremos que mejore el resultado de la evaluación con el cumplimiento de cada nuevo término de consulta. Por ejemplo, para un cuantificador potencial de exponente 2 esta mejora es cuadrática.

En la figura 5.5 se representan los números borrosos asociados a estos cuantificadores para el caso  $k = 2$ .

Para cuantificadores unarios crecientes los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  y el DFS  $\mathcal{F}_{Ch}$  coinciden con la aproximación de Yager basada en OWA [93]. En la primera serie de experimentos hemos considerado la utilización de estos modelos y la del modelo  $\mathcal{F}^A$  con el esquema de pesado  $tf/idf$  básico, sin normalizar por longitud:

$$\mu_{Sm(t_i)}(d_j) = \frac{f_{i,j}}{\max_{t_k \in d_j} f_{k,j}} \frac{\log \frac{N}{n_i}}{\log N}$$

para todo documento  $d_j \in \mathcal{D}$  y todo término  $t_i \in \mathcal{T}$ . Recuérdese que las normalizaciones del esquema son necesarias para mantener los pesos en el intervalo  $[0, 1]$  y poder interpretarlos como grados de pertenencia.

La medida de similaridad entre el documento  $d_j$  y la consulta se plantea haciendo

$$\mu_{Sm(Q(t_1, \dots, t_m))}(d_j) = \mathcal{F}(Q) \left( \left\{ \mu_{Sm(q)}(t_1)/t_1, \dots, \mu_{Sm(q)}(t_m)/t_m \right\} \right)$$

Todos los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$ ,  $\mathcal{F}^I$ ,  $\mathcal{F}_{Ch}$  y  $\mathcal{F}^A$  cumplen la propiedad de media para el cuantificador identidad (véase el apartado 1.4.2). De esta manera, el cuantificador potencial de parámetro  $k = 1$  generaliza el modelo vectorial. La generalización del

Valor de k	1	2	3	4	5	6	8	10
<b>Cuantificadores potenciales</b>								
<b>Modelos <math>\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}</math></b>								
<b>Prec. media</b>	0.204	0.241	0.241	0.225	0.215	0.208	0.203	0.200
<b>% mejora</b>		18.5 %	18.5 %	10.4 %	5.8 %	2.3 %	-0.0 %	-1.8 %
<b>Modelo <math>\mathcal{F}^A</math></b>								
<b>Prec. media</b>	0.204	0.214	0.225	0.233	0.240	0.245	0.249	0.253
<b>% mejora</b>		5.4 %	10.1 %	14.7 %	17.8 %	20.6 %	22.2 %	24.1 %
<b>Cuantificadores exponenciales</b>								
<b>Modelos <math>\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}</math></b>								
<b>Prec. media</b>	0.238	0.223	0.206	0.199	0.197	0.196	0.196	0.196
<b>% mejora</b>	16.7 %	9.5 %	1.1 %	-2.3 %	-3.4 %	-3.7 %	-3.7 %	-3.7 %
<b>Modelo <math>\mathcal{F}^A</math></b>								
<b>Prec. media</b>	0.214	0.229	0.242	0.254	0.257	<b>0.257</b>	0.249	0.244
<b>% mejora</b>	5.2 %	12.4 %	19.0 %	25.0 %	26.0 %	<b>26.1 %</b>	22.2 %	19.6 %

**Tabla 5.1:** Resultados en consultas definidas a partir de los títulos y esquema de pesado tf idf basico

modelo vectorial nos permite garantizar el rendimiento del mismo a la vez que manejamos un lenguaje de consulta muy expresivo.

La precisión media del modelo vectorial para este tipo de consultas ha sido de 0,204. En la tabla 5.1 se muestran los resultados que hemos obtenido con los distintos modelos sobre el top 1.000 de los documentos recuperados<sup>13</sup>. El tanto por ciento de mejora se calcula con respecto al resultado del modelo vectorial.

Nótese que en todos los casos se obtienen mejoras muy importantes sobre los resultados ofrecidos por el modelo vectorial. En el caso de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I$  y  $\mathcal{F}_{Ch}$  los mejores resultados se consiguen para los cuantificadores potenciales de constantes 2 y 3, con mejoras superiores al 18%. De los resultados de la experimentación también se concluye que el modelo  $\mathcal{F}^A$  tiene un comportamiento superior al de los otros modelos, con mejoras superiores al 26% para funciones exponenciales de exponente 5 y 6. En la tabla 5.2 mostramos los mejores resultados obtenidos con los modelos  $\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I$  y  $\mathcal{F}_{Ch}$  contra los mejores resultados del modelo  $\mathcal{F}^A$  para los

<sup>13</sup>En el foro TREC lo habitual es evaluar el rendimiento sobre los 1,000 primeros documentos recuperados.

	$\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I$ y $\mathcal{F}_{Ch}$	$\mathcal{F}^A$
Exhaustividad	Cuantificador potencial, $k = 2$	Cuantificador exponencial, $k = 6$
0 %	0.6597	0.6742
10 %	0.5040	0.5232
20 %	0.4253	0.4373
30 %	0.3483	0.3528
40 %	0.2784	0.2847
50 %	0.2226	0.2428
60 %	0.1770	0.1980
70 %	0.1273	0.1458
80 %	0.0892	0.1082
90 %	0.0495	0.0644
100 %	0.0105	0.0164
Prec. media	0.2411	0.2567
% mejora		+6.5 %

**Tabla 5.2:** Comparación de los resultados de los distintos QFMs para todos los niveles de exhaustividad.

distintos niveles de exhaustividad. Nótese que el modelo  $\mathcal{F}^A$  se comporta mejor que los otros modelos para todos los niveles de exhaustividad. Esto quiere decir que la mejora es consistente, mejorando la distribución de documentos relevantes a lo largo de todo el ranking de 1000 documentos.

En un segundo conjunto de experimentos hemos considerado la utilización de normalización por longitud en el esquema de pesado  $tf/idf$ .

$$\mu_{Sm(t_i)}(d_j) = \frac{f_{i,j}}{\max_{t_k \in d_j} f_{k,j}} \frac{\frac{1+\ln(1+\ln(f_{i,j}))}{(1-s)+s \frac{dl_j}{avgdl}} \log \frac{N}{n_i}}{\frac{1+\ln(1+\ln(maxdl))}{(1-s)} \log N}$$

Pero no hemos obtenido mejoras significativas con este planteamiento.

Tampoco hemos conseguido mejoras cuando construimos las consultas a partir de la descripción, de la narrativa, o al considerar todos los términos de la consulta simultáneamente. Esto es, utilizando respectivamente los términos de la descripción o de la narrativa, o conjuntamente todos los términos de la consulta TREC (independientemente de su pertenencia al título, descripción o narrativa).

También hemos experimentado la inclusión de los  $tfs$  de las consultas; esto es,

la utilización del esquema de pesado:

$$\mu_{Sm(t_i)}(d_j) = \frac{f_{i,q}}{\max_{t_k \in q} f_{k,q}} \frac{f_{i,j}}{\max_{t_k \in d_j} f_{k,j}} \frac{\log \frac{N}{n_i}}{\log N}$$

En este caso hemos obtenido alguna mejora pequeña al utilizar el modelo  $\mathcal{F}^A$  y construir la cláusula cuantificada a partir de todos los términos de la consulta TREC. No reproducimos estos resultados debido a que las mejoras mencionadas no son muy significativas (inferiores al 5% en el mejor de los casos).

### 5.5.2. Experimentación con cuantificación unaria y varias cláusulas cuantificadas

En la segunda serie de experimentos hemos trabajado conjuntamente con todas las partes en las que se dividen las consultas del TREC (título, descripción y narrativa). Cada una de las partes se ha utilizado para construir una cláusula cuantificada unaria, combinando a continuación los resultados de las mismas mediante una tnorma. Por ejemplo, para la consulta textual presentada en la figura 5.3 hemos construido consultas cuantificadas similares a la siguiente:

**al menos 4**(vitamin,cure,caus,humans,ailment)  $\wedge$   
**al menos 4**(document,identifi,vitamin,contribut,cure,...)  $\wedge$   
**al menos 4**(relevant,document,provid,inform,indic,...)

En la primera batería de experimentos hemos analizado el rendimiento de los cuantificadores “*al menos n relajado*”, potenciales y exponenciales para los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$ ,  $\mathcal{F}^I$ , y los DFSs  $\mathcal{F}_{Ch}$  y  $\mathcal{F}^A$ . Para modelar la conjunción hemos utilizado la tnorma producto. De momento sólo hemos considerado la aplicación del mismo tipo de cuantificador en todas las cláusulas de la consulta. Por ejemplo, en la utilización de cuantificadores potenciales utilizamos siempre el mismo exponente para definir el cuantificador que se aplica a los títulos, descripción y narrativa.

En la tabla 5.3 mostramos los resultados que hemos obtenido al utilizar esta aproximación y el esquema *tf/idf* básico. El tanto por ciento de mejora se calcula en todos los casos con respecto a los resultados obtenidos con cuantificadores potenciales de exponente 1 (esto es, cuantificadores “*identidad*”). Para este caso hemos obtenido una precisión media de 0,257.

$Q(\text{titulo}) \wedge Q(\text{descripcion}) \wedge Q(\text{narrativa})$								
Valor de k	1	2	3	4	5	6	8	10
<b>Cuantificadores potenciales</b>								
<b>Modelos <math>\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}</math></b>								
Prec. media	0.257	0.286	0.263	0.237	0.226	0.212	0.197	0.184
% mejora		11.2 %	2.3 %	-8.0 %	-12.3 %	-17.4 %	-23.3 %	-28.4 %
<b>Modelo <math>\mathcal{F}^A</math></b>								
Prec. media	0.257	0.267	0.275	0.281	0.282	0.286	0.292	<b>0.293</b>
% mejora		3.6 %	7.0 %	9.2 %	9.8 %	11.1 %	13.4 %	<b>13.8 %</b>
<b>Cuantificadores exponenciales</b>								
<b>Modelos <math>\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}</math></b>								
Prec. media	0.106	0.100	0.098	0.096	0.095	0.094	0.093	0.093
% mejora	-58.8 %	-61.0 %	-61.9 %	-62.5 %	-63.0 %	-63.4 %	-63.8 %	-63.9 %
<b>Modelo <math>\mathcal{F}^A</math></b>								
Prec. media	0.256	0.263	0.253	0.239	0.227	0.216	0.192	0.169
% mejora	-3.9 %	2.3 %	-1.8 %	-7.2 %	-11.9 %	-16.1 %	-25.5 %	-34.2 %
<b>Cuantificadores al menos k</b>								
<b>Modelos <math>\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}</math></b>								
Prec. media	0.257	0.272	0.276	0.275	0.278	0.280	0.285	0.286
% mejora		5.8 %	7.3 %	6.9 %	8.1 %	9.0 %	10.8 %	11.3 %
<b>Modelo <math>\mathcal{F}^A</math></b>								
Prec. media	0.257	0.265	0.267	0.267	0.267	0.267	0.267	0.267
% mejora		3.0 %	3.6 %	3.6 %	3.6 %	3.6 %	3.6 %	3.6 %

**Tabla 5.3:** Comparación de los resultados al considerar varias cláusulas cuantificadas.

Exhaustividad	Modelo vectorial	$\mathcal{F}^A$ (cuantificador potencial, $k = 10$ )
0 %	0.6354	0.7769
10 %	0.4059	0.5933
20 %	0.3188	0.4976
30 %	0.2382	0.4027
40 %	0.1907	0.3190
50 %	0.1383	0.2786
60 %	0.0885	0.2165
70 %	0.0530	0.1622
80 %	0.0320	0.1050
90 %	0.0158	0.0644
100 %	0.0019	0.01724
Prec. media	0.1697	0.2928
% mejora		72.54 %

**Tabla 5.4:** Comparación de los resultados del modelo vectorial con los mejores resultados obtenidos al utilizar varias cláusulas cuantificadas.

Los incrementos de precisión obtenidos con respecto a este caso base al modificar los cuantificadores son en ocasiones bastante importantes. Nótese además que la estrategia que se ha planteado se aplica de una manera automática, por lo que se demuestra que el lenguaje de consulta que se propone no es sólo interesante para su utilización de modo interactivo, sino que también tiene mucho que decir en la transformación automática de las expresiones de consulta textuales.

En la tabla 5.4 comparamos los mejores resultados que hemos obtenido mediante esta estrategia con los mejores resultados obtenidos cuando aplicamos el modelo vectorial conjuntamente a todos los términos de la consulta TREC. Nótese la mejora obtenida en la precisión gracias a la utilización del lenguaje de consultas basado en cuantificación borrosa. En este caso se demuestra la superioridad de nuestra aproximación sobre la basada en el modelo vectorial, que sólo es capaz de manejar “consultas planas” sin capacidad para estructurar los términos en modo alguno.

También hemos experimentado la utilización de la  $t$ norma mínimo en vez del producto para el modelado de la conjunción de los cuantificadores, pero los resultados han sido inferiores a los que hemos presentado. En otra batería de experimentos hemos sustituido las  $t$ normas por operadores compensatorios [64,65], pero el rendi-

miento ha sido bastante inferior al obtenido con la norma producto. Esto coincide con las consideraciones expuestas en [64], trabajo en el que se refleja la problemática de estos operadores para IR.

En una última batería de experimentos hemos considerado la inclusión de los *tf*s de las consultas (tal como se ha explicado en el apartado anterior). Los resultados que hemos obtenido han sido ligeramente superiores a los que hemos presentado. En este caso, los mejores resultados los hemos conseguido para el mismo caso que en los experimentos anteriores, utilizando cuantificadores potenciales de exponente 10. La precisión media de este experimento ha sido del 29.92 %, representando una mejora de aproximadamente el 2 % con respecto al caso en el que no se considera el *tf* de la consulta (resultados de la tabla 5.4).

En este momento no hemos experimentado todavía la aplicación de distintos cuantificadores a los distintos componentes de la consulta, experimentación que esperamos abordar en el futuro cercano. Sobre este punto nos parece importante resaltar que el interés principal de estos experimentos es que demuestran la utilidad de los lenguajes de consulta que incorporan cuantificadores borrosos en el dominio de IR, permitiendo obtener en ocasiones mejoras muy importantes.

En un segundo conjunto de experimentos hemos considerado la utilización de normalización por longitud en el esquema de pesado *tf/idf*. Los resultados se muestran en la tabla 5.5.

En este caso, la comparación de los mejores resultados obtenidos con esta estrategia con los mejores resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo vectorial sobre una consulta plana (véase la tabla 5.6) no ofrece mejoras de rendimiento comparables al caso del esquema de pesado que no considera la normalización por longitud. Aún así, hemos obtenido algunas mejoras de cierta relevancia.

En definitiva, estos experimentos demuestran que la aproximación es operativa, competitiva con el estado del arte y, en algunos casos, superior a modelos de alto rendimiento.

### 5.5.3. Experimentación con cuantificación binaria

En la última serie de experimentos hemos buscado la manera de aplicar cuantificación binaria. Para ello hemos combinado el esquema de pesado planteado en las expresiones 5.10, 5.11 y 5.12, modificado para incluir la normalización por longitud,

$Q(\text{titulo}) \wedge Q(\text{descripcion}) \wedge Q(\text{narrativa})$								
Valor de k	1	2	3	4	5	6	8	10
<b>Cuantificadores potenciales</b>								
Modelos $\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}$								
Prec. media	0.398	0.318	0.258	0.225	0.208	0.197	0.183	0.176
% mejora		-20.0 %	-35.2 %	-43.5 %	-47.8 %	-50.4 %	-53.4 %	-55.7 %
Modelo $\mathcal{F}^A$								
Prec. media	0.398	0.399	0.394	0.387	0.381	0.375	0.356	0.344
% mejora		0.3 %	-1.1 %	-2.8 %	-4.1 %	-5.7 %	-10.5 %	-13.6 %
<b>Cuantificadores exponenciales</b>								
Modelos $\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}$								
Prec. media	0.102	0.096	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095	0.095
% mejora	-74.4 %	-76.0 %	-76.2 %	-76.2 %	-76.2 %	-76.2 %	-76.2 %	-76.2 %
Modelo $\mathcal{F}^A$								
Prec. media	0.386	0.378	0.355	0.319	0.278	0.233	0.175	0.146
% mejora	-3.0 %	-5.0 %	-10.8 %	-19.8 %	-30.1 %	-41.3 %	-56.1 %	-63.4 %
<b>Cuantificadores al menos k</b>								
Modelos $\mathcal{F}^{MD}, \mathcal{F}^I, \mathcal{F}_{Ch}$								
Prec. media	0.398	0.380	0.367	0.349	0.340	0.336	0.328	0.323
% mejora		-4.5 %	-7.8 %	-12.3 %	-14.5 %	-15.4 %	-17.6 %	-18.7 %
Modelo $\mathcal{F}^A$								
Prec. media	0.398	<b>0.399</b>	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399
% mejora		<b>2.3 %</b>	2.3 %	2.3 %	2.3 %	2.3 %	2.3 %	2.3 %

**Tabla 5.5:** Comparación de los resultados al considerar varias cláusulas cuantificadas y normalización por longitud.

Exhaustividad	Modelo vectorial	$\mathcal{F}^A$ (cuantificador potencial, $k = 2$ )
0 %	0.8741	0.8591
10 %	0.7211	0.7262
20 %	0.6159	0.6520
30 %	0.5074	0.5383
40 %	0.4380	0.4494
50 %	0.3673	0.3693
60 %	0.3186	0.3149
70 %	0.2461	0.2544
80 %	0.1761	0.1884
90 %	0.1122	0.1274
100 %	0.0374	0.042
Prec. media	0.3858	0.3986
% mejora		%3.33

**Tabla 5.6:** Comparación de los resultados del modelo vectorial con los mejores resultados obtenidos al utilizar varias cláusulas cuantificadas cuando se considera la normalización por longitud del  $tf$ .

con cuantificadores binarios. Planteamos la siguiente variación de la expresión 5.10:

$$\mu_{C_{d_j}}(t_i) = \frac{1 + \ln(1 + \ln(f_{i,j}))}{(1-s) + s \frac{dl_j}{avgdl}} \frac{(1-s)}{1 + \ln(1 + \ln(maxdl))}$$

Recordemos que la subexpresión  $\frac{1 + \ln(1 + \ln(f_{i,j}))}{(1-s) + s \frac{dl_j}{avgdl}}$  se corresponde con la normalización por longitud del  $tf$ , mientras que la subexpresión  $\frac{(1-s)}{1 + \ln(1 + \ln(maxdl))}$  se utiliza para normalizar el factor anterior al intervalo  $[0, 1]$  (véase el apartado 5.3.2).

La importancia de los términos de consulta se define en función de sus apariciones en la consulta y su valor global de  $idf$  siguiendo la expresión 5.11 de la siguiente manera:

$$\mu_{\mathbf{w}}(t_i) = \frac{f_{i,q}}{\max_{t_k \in q} f_{k,q}} \cdot \frac{\ln \frac{N+1}{n_i}}{\ln(N+1)}$$

Y la semántica que se asocia a las consultas es la siguiente (véase la expresión 5.12):

$$\mu_{Sm(Q_s(\langle \mu_{\mathbf{w}}(t_1), t_1 \rangle, \dots, \langle \mu_{\mathbf{w}}(t_m), t_m \rangle))}(d_j) = \mathcal{F}(Q)(W, C_{d_j})$$

El cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  debe modelar la intuición “ $Q$

	Prec. media	% mejora
<b>Título</b>		
Vectorial con normalización por longitud	0.3177	
$\mathcal{F}^{MD}$	0.2498	-21.37 %
$\mathcal{F}^I$	0.2814	-11.43 %
$\mathcal{F}^A$	0.3065	-3.52 %
$\mathcal{F}_{Ch}$	0.0393	-87.63 %

**Tabla 5.7:** Comparación de los resultados del modelo vectorial normalizado por longitud con los resultados de los distintos QFMs para consultas construidas a partir de los títulos de las consultas TREC.

*términos de la consulta con importancia  $W$  son relevantes en el contexto del documento  $d_j$* ". Esto es, el conjunto borroso  $W$  modela la importancia de los términos para la consulta y el conjunto borrosos  $C'_{d_j}$  refleja la importancia para el documento.

La opción natural consiste en utilizar cuantificadores proporcionales. Hemos considerado los siguientes tipo de cuantificadores:

$$\text{potencial}_k(Y_1, Y_2) = \begin{cases} \left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}\right)^k & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

$$\text{exponencial}_k(Y_1, Y_2) = \begin{cases} \frac{e^k \left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}\right)}{e^k} & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

que son los análogos de los cuantificadores potenciales y exponenciales unarios.

Hemos lanzado algunas baterías de experimentos con los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  y con los DFSs  $\mathcal{F}^A$  y  $\mathcal{F}_{ch}$ . En la primera serie de experimentos hemos estudiado el rendimiento de esta aproximación cuando construimos las cláusulas cuantificadas a partir de los títulos de la consulta TREC. Los mejores resultados para todos los QFMs los hemos obtenido en el caso en el que utilizamos cuantificadores potenciales de exponente 1 (cuantificador "*identidad*"). En la tabla 5.7 podemos ver la precisión media obtenida con los distintos QFMs y este tipo de cuantificadores.

Esta serie de experimentos iniciales parece indicar que sólo el DFS  $\mathcal{F}^A$  es capaz de competir con el modelo vectorial normalizado por longitud. Los resultados obtenidos con los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  ya muestran ciertas diferencias con respecto a los obtenidos

con el modelo vectorial, perdiendo el QFM  $\mathcal{F}^I$  un 11,4% de rendimiento y el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  un 21,4%.

Los peores resultados sin duda los hemos obtenido con el DFS  $\mathcal{F}_{Ch}$ . Con el esquema de pesado que hemos planteado en este apartado este modelo simplemente no produce resultados válidos. La precisión media que hemos obtenido utilizando un cuantificador binario proporcional definido a partir de un número borroso lineal y consultas construidas a partir de los títulos es inferior al 4% (nótese que la precisión del modelo vectorial para este caso es de casi el 32%).

Como el modelo  $\mathcal{F}^A$  sólo ha ofrecido resultados ligeramente inferiores a los del modelo vectorial, hemos decidido lanzar nuevas baterías de experimentos utilizando únicamente este modelo. En estas baterías hemos considerado la construcción de las cláusulas cuantificadas utilizando la parte de descripción de las consultas TREC, utilizando todos los términos de la consulta TREC simultáneamente, y utilizando varias cláusulas de consulta, tal como describimos en el apartado anterior. Sólo hemos considerado la utilización de cuantificadores potenciales. La tabla 5.8 muestra los mejores resultados obtenidos con este modelo para las consultas construidas a partir del título, la descripción o de toda la consulta TREC; y el resultado particular de una consulta formada por varias cláusulas en la que aplicamos un cuantificador de potencia 1 al título y cuantificadores potenciales de exponente 6 a la descripción y la narrativa<sup>14</sup>. Es notable que los resultados que se presentan apenas muestran diferencias entre esta aproximación y la del modelo vectorial normalizado por longitud.

También nos parece destacable que el modelo  $\mathcal{F}^A$  se ha comportado de manera muy estable en la experimentación, presentando pocas diferencias en los resultados ante la modificación del exponente de los cuantificadores potenciales.

Debido a los malos resultados que hemos obtenido con el modelo  $\mathcal{F}_{Ch}$  hemos decidido lanzar una serie de experimentos adicional utilizando el siguiente esquema de pesado para el conjunto de importancias:

$$\mu_{\mathbf{w}}(t_i) = 0,5 + 0,5 \frac{f_{i,q}}{\max_{t_k \in q} f_{k,q}} \cdot \frac{\ln \frac{N+1}{n_i}}{\ln(N+1)}$$

Este esquema de pesado intenta corregir el comportamiento del modelo teniendo

---

<sup>14</sup>Este es el caso en el que hemos obtenido mejores resultados para este tipo de consultas. No hemos realizado una experimentación exhaustiva con este tipo de consultas, aunque los resultados de los que disponemos son prácticamente idénticos para todas las combinaciones que hemos probado.

	Prec. media	% mejora
<b>Título</b>		
Vectorial con normalización por longitud	0.3177	
<i>DFS F<sup>A</sup></i> Cuantificador potencial exponente 1	0.3065	-3.52 %
<b>Descripción</b>		
Vectorial con normalización por longitud	0.2369	
<i>DFS F<sup>A</sup></i> Cuantificador potencial exponente 8	0.2495	5.32 %
<b>Título + Descripción + Narrativa</b>		
Vectorial con normalización por longitud	0.3858	
<i>DFS F<sup>A</sup></i> Cuantificador potencial exponente 8	0.3880	0.57 %
<b>3 Cláusulas</b>		
<i>DFS F<sup>A</sup></i> <b>Título:</b> Cuantificador potencial exponente 1 <b>Descripción:</b> Cuantificador potencial exponente 6 <b>Narrativa:</b> Cuantificador potencial exponente 6	03922	1.08 %

**Tabla 5.8:** Comparación de los resultados del modelo vectorial normalizado y el QFM  $\mathcal{F}^A$ .

en cuenta la interpretación subyacente del mismo basada en conjuntos trivaluados. Aunque los resultados con este esquema de pesado mejoran, el comportamiento del mismo sigue siendo muy inadecuado, con una pérdida de precisión media cercana al 50 % con respecto al modelo vectorial. Nótese además que este tipo de transformaciones no debiera ser necesaria para la aplicación de cuantificación borrosa en dominios prácticos, ya que se está acudiendo a la interpretación subyacente del modelo para modificar los conjuntos borrosos a los que se aplica, aun cuando el comportamiento del modelo debería ser muy adecuado como consecuencia del cumplimiento del marco axiomático de los DFS y el conjunto amplio de propiedades de adecuación adicionales que cumple este modelo.

## 5.6. Resumen de los resultados de la experimentación y conclusiones

En este capítulo hemos mostrado como se puede utilizar cuantificación borrosa en la tarea de recuperación de la información. Hemos propuesto un lenguaje de consulta que extiende el modelo borroso con cuantificadores unarios y binarios, de gran potencia expresiva. Además, hemos lanzado una serie de experimentos iniciales contra las bases de datos del TREC, con muy buenos resultados.

Aunque la evaluación de los modelos ha de dar todavía más frutos, los resultados experimentales ya indican que la cuantificación borrosa tiene mucho que decir en el ámbito de IR. Sobre este punto no se debería olvidar que la intención final del desarrollo que hemos presentado es la de manejar lenguajes de consulta expresivos al mismo tiempo que se garantiza el alto rendimiento del modelo vectorial, hecho que hemos confirmado tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico, con la experimentación contra las bases de datos del TREC. En este sentido las mejoras de rendimiento que hemos conseguido en algunos de los experimentos realizados son bastante importantes. Por otro lado tampoco pretendemos aquí determinar con exactitud los cuantificadores concretos que optimizan el rendimiento sino mostrar que nuestros métodos son operativos y más aún competitivos con el estado del arte.

Resumimos a continuación las principales aportaciones que hemos realizado en este capítulo:

- El lenguaje de consulta propuesto presenta una capacidad expresiva superior a la del modelo booleano extendido, al superponer cuantificación unaria y binaria sobre el modelo borroso.
- Superamos las limitaciones de rendimiento de los modelos basados en el modelo booleano extendido. Para el cuantificador semi-borroso identidad, los QFMs que se plantean en esta memoria generalizan el modelo vectorial, por lo que siempre podremos igualar los resultados de éste. Ya hemos mencionado que este es el gran problema de las aproximaciones analizadas al principio de este capítulo, debido a que los operadores con los que se evalúan las expresiones de consulta no son competitivos con el modelo vectorial.
- Además, en la experimentación contra las bases de datos del TREC hemos demostrado, utilizando las herramientas de evaluación propias del ámbito de IR, que los modelos basados en cuantificación borrosa pueden obtener mejoras de rendimiento importantes en la tarea de recuperación de información básica.
- Un punto muy importante es que hemos comenzado la experimentación de la utilidad de la cuantificación binaria en la tarea de recuperación de información básica. En este sentido, hemos obtenido resultados aceptables en la comparación de los rendimientos del modelo vectorial con pesos normalizados por longitud y de los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ ; y resultados comparables para el DFS  $\mathcal{F}^A$ . En las secciones 5.4.2 y 5.4.3, en las que describimos el lenguaje de consultas, hemos mostrado algunos ejemplos que apuntan que la cuantificación binaria tiene mucha utilidad en el dominio de IR. Huelga decir que el modelo vectorial no proporciona ningún mecanismo para manejar este tipo de consultas.
- Además, hemos demostrado la utilidad de los QFMs definidos en esta memoria en un entorno práctico. Los resultados obtenidos refuerzan nuestra intuición de que los modelos que hemos definido son más útiles que los DFSs definidos en [47]. En particular, el DFS  $\mathcal{F}_{Ch}$ , modelo paradigmático de DFS útil para las aplicaciones, no produce resultados válidos cuando se utiliza con cuantificadores binarios en el entorno de IR.

Como trabajo futuro, nos plantearemos el estudio de la aplicación de cuantificación borrosa en otras tareas de IR. En particular, creemos que el lenguaje de

consultas puede ser muy útil para la tarea de recuperación de pasajes [62] (utilizando el poder de la cuantificación binaria para aplicar consultas a distintas partes del documento). No obstante, la expresividad del lenguaje que hemos presentado nos hace creer que otras tareas tales como la *realimentación de relevancia* [53] o la *detección de la novedad* [1] también se pueden beneficiar del planteamiento que hemos realizado.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis presentamos algunas de nuestras aportaciones al ámbito de la cuantificación borrosa tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. Primeramente, hemos definido una serie de modelos de cuantificación que exhiben un sólido comportamiento teórico. A través de la clasificación de cuantificadores, hemos realizado un estudio exhaustivo de la expresividad manejable mediante cuantificación borrosa. También hemos planteado la utilización de cuantificación borrosa para aumentar la potencia de los lenguajes de consulta utilizados en recuperación de información, con muy buenos resultados empíricos. Resumimos a continuación los resultados más relevantes presentados en la tesis.

El primer punto que nos parece reseñable es la completa revisión bibliográfica de las aproximaciones a la cuantificación borrosa. Esta revisión abarca las propuestas más importantes realizadas hasta la fecha, incluyendo por primera vez un análisis crítico de las planteadas en [22, 45, 47, 80].

El análisis que hemos llevado a cabo en esta revisión confirma que la mayoría de las propuestas que se han planteado hasta el momento no resuelven el problema de la cuantificación borrosa, razón por la cual creemos que las propuestas para el modelado de la cuantificación que hemos realizado en esta memoria son de mucho interés.

Con respecto al modelado de la cuantificación borrosa, hemos planteado tres *mecanismos de borrosificación de cuantificadores* (QFMs) basados en una interpretación probabilística de los conjuntos borrosos. El primer QFM que proponemos, el modelo  $\mathcal{F}^A$ , sigue la interpretación de los conjuntos borrosos basada en verosi-

militudes. Los otros dos QFMs, los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ , siguen la interpretación de conjuntos borrosos basada en conjuntos aleatorios y se enmarcan dentro de un marco probabilístico que nos permite definir otros modelos<sup>1</sup>. Además, hemos confirmado con un análisis teórico riguroso el buen comportamiento de estos modelos y propuesto soluciones algorítmicas eficientes para los mismos.

Por lo que sabemos, el QFM  $\mathcal{F}^A$  es el único *mecanismo de borrosificación de determinantes* (DFS) no estándar que se conoce. Las propiedades a mayores del marco axiomático de los DFSs que verifica este modelo le garantizan un comportamiento excelente, bajo nuestro punto de vista mejor que el de los modelos propuestos en [47] (véase la revisión bibliográfica de estos modelos realizada en la sección 1.5.7). Como contrapartida, el QFM  $\mathcal{F}^A$  está limitado a referenciales de cardinalidad finita. No obstante, esto no es muy limitativo para muchas aplicaciones prácticas.

Por su parte, aunque los QMFs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  no cumplen el marco axiomático de los DFSs, su comportamiento teórico sigue siendo muy bueno. Además, estos QFMs tienen una interpretación subyacente que quizás sea algo más natural que la del QFM  $\mathcal{F}^A$ . También es destacable que los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  no están limitados a conjuntos finitos.

Nuestra opinión es que el no cumplimiento del marco axiomático de los DFSs por parte de los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  no los hace en la práctica inferiores a estos (véase la sección 3.3.2 donde se analizan las propiedades de estos modelos). Por una parte creemos que su interpretación probabilística subyacente puede ser muy útil a la hora de combinar la cuantificación borrosa con otras aproximaciones basadas en probabilidades (y hemos visto al final del capítulo 3 algunos ejemplos que demuestran este potencial). Por otra parte, recordemos que los modelos que verifican el marco axiomático de los DFSs tampoco están exentos de problemas. Los DFSs estándar que cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad (por ejemplo, los modelos de comportamiento teórico excelente  $\mathcal{M}_{CX}$  y  $\mathcal{M}$  [47]) no son válidos para muchas aplicaciones. Con respecto a los DFSs estándar que no cumplen la propiedad de propagación de la borrosidad, nos parece muy importante señalar que el rendimiento de los QFMs  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  en los experimentos de IR realizados con cuantificadores binarios (capítulo 5), aunque inferior al del DFS  $\mathcal{F}^A$ , ha sido muy

---

<sup>1</sup>Matizamos de nuevo que el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  es una variación del modelo planteado en [80, sección 3.3.2. y sección 3.4.1.], [22, pág. 37] en la que lo adaptamos al marco de trabajo basado en cuantificadores semi-borrosos y eliminamos la problemática normalización de los conjuntos borrosos que se utiliza en su definición original.

---

superior al del modelo  $\mathcal{F}^{Ch}$  [47, pág. 230], ejemplo paradigmático de “modelo útil” que no propaga la borrosidad. De esta manera ninguno de los ejemplos paradigmáticos de DFSs estándar  $\mathcal{M}_{CX}$ ,  $\mathcal{M}$  o  $\mathcal{F}^{Ch}$  es válido para uno de los campos en los que la cuantificación borrosa parece tener más futuro.

Otro punto muy importante a favor de estos modelos es que su interpretación probabilística nos permite un tratamiento alternativo muy natural de las situaciones de indeterminación o no aplicabilidad. En la parte final del capítulo 3 explicamos por qué el tratamiento de estas situaciones es importante, y la técnica que nos permite modificar los QFMs de interpretación probabilística para tener en cuenta estas situaciones.

Un aspecto distinto del trabajo realizado pero de no menos interés es la clasificación de cuantificadores semi-borrosos que hemos planteado en el capítulo 4. Dicha clasificación supera ampliamente la dicotomía absoluto/proporcional de Zadeh, al incluir distintos tipos de cuantificadores comparativos de diversas aridades, cuantificadores que generalizan algunos índices estadísticos, etc. Esta clasificación es importante porque el campo de la cuantificación borrosa carecía de un análisis de la expresividad que puede manejar suficientemente maduro.

La clasificación de cuantificadores es sin duda de aplicación en diversos ámbitos. El campo de las bases de datos borrosas [13,14] o el de la recuperación de información [9,10] se pueden ver directamente beneficiados de esta propuesta, ya que la misma permite aumentar la potencia de los lenguajes de consulta con algunas expresiones que hasta ahora no están siendo consideradas. Con respecto a esta clasificación, al final del capítulo 4 hemos explicado que la misma nos ha permitido identificar algunas expresiones temporales borrosas que no habían sido tratadas hasta este momento.

No nos hemos limitado, en cualquier caso, a la propuesta teórica y estudio de modelos; al contrario, hemos estudiado la utilidad de nuestras propuestas en la tarea básica de recuperación de información. Hemos propuesto un lenguaje de consulta de una gran potencia expresiva que extiende el lenguaje borroso con cuantificadores unarios y binarios. También hemos contrastado con experimentación a gran escala contra las bases de datos del TREC la aproximación planteada con muy buenos resultados. Nos parece muy importante señalar que, para los QFMs que hemos definido en esta memoria, la propuesta garantiza el objetivo no alcanzado por las alternativas booleanas extendidas al modelo vectorial, de aumentar la expresividad de los

lenguajes de consulta a la vez que se mantiene el excelente rendimiento de éste. Ni que decir tiene que la propuesta basada en cuantificación borrosa es mucho más expresiva que las basadas en el modelo booleano extendido. Además, para algunos de los experimentos presentados, hemos conseguido mejoras de rendimiento realmente notables.

Con respecto a la utilización de cuantificación binaria en IR, queremos resaltar de nuevo que en estos momentos todavía estamos en una etapa inicial del estudio de sus posibilidades. No obstante, creemos que el futuro de la cuantificación binaria en el campo de IR es muy prometedor. Nótese que, para el DFS  $\mathcal{F}^A$ , los resultados que hemos obtenido son comparables a los del modelo vectorial normalizado por longitud, referente de rendimiento del campo. Y en el caso de la cuantificación binaria no estamos generalizando el modelo vectorial, como en el caso de la cuantificación unaria, con lo que las dos aproximaciones (vectorial y cuantificada) se convierten en alternativas distintas pero de resultados comparables.

Esta implementación y experimentación, siguiendo la metodología y herramientas estándar en recuperación de información, es una característica diferenciadora de esta tesis y supone un valor añadido para el campo de cuantificación borrosa en recuperación de información, cuyas aplicaciones, hasta la fecha, son principalmente propuestas teóricas que a lo sumo plantean experimentación a muy pequeña escala.

Para finalizar, vamos a recordar algunos de los puntos abiertos más importantes acerca de la cuantificación borrosa, todos ellos explicados en el desarrollo de esta memoria.

Quizás el punto abierto más importante es analizar si existe alguna posibilidad para la definición de DFSs distinta de los DFSs estándar y del DFS  $\mathcal{F}^A$ . En la actualidad no disponemos de resultados.

También nos parece tremendamente importante avanzar en el estudio de la cuantificación sobre dominios continuos (por ejemplo, tiempo o espacio). No es difícil generalizar muchos cuantificadores semi-borrosos interesantes al dominio continuo, pero en esta memoria no hemos intentado profundizar en estos temas. No obstante, nuestra intención es estudiar este tipo de cuestiones en el futuro inmediato.

Un aspecto quizás no tan relevante como los anteriores pero de indudable interés es el estudio de la adecuación real de los modelos  $\mathcal{F}^A$  y  $\mathcal{M}_{CX}$  [47, pág. 206] para la evaluación de expresiones con cuantificación anidada. Aconsejamos al lector

consultar el capítulo 4 para más detalles. Intuitivamente, si estos modelos no son adecuados para el modelado de este tipo de cuantificación, las dos “construcciones” que se pueden plantear para modelar estas expresiones ofrecerán resultados distintos.

El estudio de las expresiones que se pueden modelar mediante cuantificación enraizada [46, pág. 142] también es de interés. El planteamiento del modelado de la cuantificación enraizada borrosa es muy reciente y hasta nuestro conocimiento todavía no se ha estudiado qué tipo de expresiones pueden ser más útiles para las aplicaciones. En este momento no conocemos ningún intento de utilizar cuantificación enraizada en un dominio práctico.

Con respecto al estudio de las posibilidades de la cuantificación borrosa en otros ámbitos de IR, creemos que el lenguaje de consultas puede ser muy útil para la tarea de recuperación de pasajes [62], aunque posiblemente otros ámbitos tales como la realimentación de la relevancia [53] o la detección de la novedad [1] también se podrán beneficiar del planteamiento que hemos hecho.

Un aspecto sobre el que ya hemos empezado a trabajar pero que no hemos presentado en esta memoria es el desarrollo de algoritmos eficientes para la evaluación de expresiones cuantificadas en el dominio temporal. Las soluciones algorítmicas que hemos planteado en el apéndice B pueden ser demasiado lentas para la evaluación de expresiones en el dominio temporal. En este sentido en [30] hemos planteado una solución algorítmica que permite evaluar expresiones temporales con el modelo  $\mathcal{F}^I$  de manera eficiente, la cual se adapta, de manera sencilla, al modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ . El planteamiento de soluciones eficientes para otros modelos, incluido el modelo  $\mathcal{F}^A$ , es ahora mismo un problema abierto.

En el futuro intentaremos profundizar en el estudio de los puntos que hemos comentado. Y como se refleja, también estamos muy interesados en el trabajo en aplicaciones. Creemos que el campo de la cuantificación borrosa ha alcanzado un nivel de madurez suficiente para decidir qué modelos utilizar de una manera objetiva, en función de los requisitos de las aplicaciones. Por esta razón la utilización de cuantificación borrosa en recuperación de información, en razonamiento temporal borroso, en minería de datos o en bases de datos borrosas continuarán siendo para nosotros de interés primordial. En este sentido la utilización de los mecanismos de cuantificación borrosa aquí planteados como método de extensión borrosa de operadores nítidos (operadores de interés en razonamiento temporal, procesado de señal, recuperación de información, ...), es ya un buen indicio en el que nos proponemos

profundizar en el futuro.

# Apéndice A

## Análisis de propiedades de los QFMs $\mathcal{F}^A$ , $\mathcal{F}^I$ y $\mathcal{F}^{MD}$

### A.1. Modelo $\mathcal{F}^A$

En este apartado analizamos las propiedades del modelo  $\mathcal{F}^A$ . Primeramente demostramos que el modelo  $\mathcal{F}^A$  es un DFS para después analizar otras propiedades adicionales que cumple este modelo.

Previamente demostraremos algunos resultados que necesitaremos más adelante.

En primer lugar estableceremos los operadores inducidos por el modelo:

**Lema 1** *Se cumple:*

1)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(id_2)(x) = \widetilde{id}_I(x)$ .

2)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\neg) = \widetilde{\neg}(x) =$  (donde con  $\widetilde{\neg}$  se denota la negación estándar).

3)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\wedge)(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$ ; es decir, la tnorma producto

4)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\vee)(x_1, x_2) = \widetilde{\neg}\widetilde{\mathcal{F}}^A(\wedge)(\widetilde{\neg}x_1, \widetilde{\neg}x_2) = x_1 + x_2 - x_1 \times x_2$ ; es decir, la función de disyunción inducida es la dual de la operación de conjunción inducida. En este caso la tconorma probabilística.

5)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\rightarrow)(x_1, x_2) = 1 - x_1 + x_1 * x_2$ : En este caso la función de implicación Reichenbach.

**Demostración.** 1)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(id_2) = \widetilde{id}_I$ . Nótese que

$$\begin{aligned} Q_{id_2}(\{1\}) &= id_2(\eta^{-1}(\{1\})) = id_2(1) = 1 \\ Q_{id_2}(\emptyset) &= id_2(\eta^{-1}(\emptyset)) = id_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}^A(id_2)(x) &= \mathcal{F}^A(Q_{id_2})(\eta(x)) \\ &= \mathcal{F}^A(Q_{id_2})(\{x/1\}) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(\{1\})} m_{\{x/1\}}(Y) Q_{id_2}(Y) \\ &= m_{\{x/1\}}(\emptyset) Q_{id_2}(\emptyset) + m_{\{x/1\}}(\{1\}) Q_{id_2}(\{1\}) \\ &= (1 - \mu_{\{x/1\}}(1)) \times 0 + \mu_{\{x/1\}}(1) \times 1 \\ &= \mu_{\{x/1\}}(1) \\ &= x \\ &= \widetilde{id}_I(x) \end{aligned}$$

con lo que  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(id_2) = \widetilde{id}_I$  es la función identidad.

2)  $\widetilde{\neg} = \widetilde{\mathcal{F}}^A(\neg)$  es la negación estándar. Nótese que

$$\begin{aligned} Q_{\neg}(\{1\}) &= \neg(\eta^{-1}(\{1\})) = \neg(1) = 0 \\ Q_{\neg}(\emptyset) &= \neg(\eta^{-1}(\emptyset)) = \neg(0) = 1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}^A(\neg)(x) &= \mathcal{F}^A(Q_{\neg})(\eta(x)) \\ &= \mathcal{F}^A(Q_{\neg})(\{x/1\}) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(\{1\})} m_{\{x/1\}}(Y) Q_{\neg}(Y) \\ &= m_{\{x/1\}}(\emptyset) Q_{\neg}(\emptyset) + m_{\{x/1\}}(\{1\}) Q_{\neg}(\{1\}) \\ &= (1 - \mu_{\{x/1\}}(1)) \times 1 + \mu_{\{x/1\}}(1) \times 0 \\ &= (1 - \mu_{\{x/1\}}(1)) \\ &= (1 - x) \\ &= \widetilde{\neg}(x) \end{aligned}$$

con lo que  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\neg) = \widetilde{\neg}$  es la función de negación estándar.

3)  $\tilde{\wedge} = \tilde{\mathcal{F}}^A(\wedge)$  es la *tnorma* producto. Nótese que

$$\begin{aligned} Q_{\wedge}(\emptyset) &= \wedge(\eta^{-1}(\emptyset)) = \wedge(0, 0) = 0 \\ Q_{\wedge}(\{1\}) &= \wedge(\eta^{-1}(\{1\})) = \wedge(1, 0) = 0 \\ Q_{\wedge}(\{2\}) &= \wedge(\eta^{-1}(\{2\})) = \wedge(0, 1) = 0 \\ Q_{\wedge}(\{1, 2\}) &= \wedge(\eta^{-1}(\{1, 2\})) = \wedge(1, 1) = 1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}^A(x_1, x_2) &= \mathcal{F}^A(Q_{\wedge})(\eta^{-1}(x_1, x_2)) \\ &= \mathcal{F}^A(Q_{\wedge})(\{x_1/1, x_2/2\}) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(\{1, 2\})} m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(Y) Q(Y) \\ &= m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\emptyset) Q(\emptyset) + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1\}) Q(\{1\}) \\ &\quad + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{2\}) Q(\{2\}) + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1, 2\}) Q(\{1, 2\}) \\ &= m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1, 2\}) \\ &= x_1 \times x_2 \end{aligned}$$

con lo que  $\tilde{\mathcal{F}}^A(\wedge)$  es la *tnorma* producto.

4)  $\tilde{\vee} = \tilde{\mathcal{F}}^A(\vee)$  es la *tconorma* probabilística. Nótese que

$$\begin{aligned} Q_{\vee}(\emptyset) &= \vee(\eta^{-1}(\emptyset)) = \vee(0, 0) = 0 \\ Q_{\vee}(\{1\}) &= \vee(\eta^{-1}(\{1\})) = \vee(1, 0) = 1 \\ Q_{\vee}(\{2\}) &= \vee(\eta^{-1}(\{2\})) = \vee(0, 1) = 1 \\ Q_{\vee}(\{1, 2\}) &= \vee(\eta^{-1}(\{1, 2\})) = \vee(1, 1) = 1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{F}}^A(x_1, x_2) \\
&= \mathcal{F}^A(Q_{\vee})(\eta^{-1}(x_1, x_2)) \\
&= \mathcal{F}^A(Q_{\vee})(\{x_1/1, x_2/2\}) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(\{1,2\})} m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(Y) Q(Y) \\
&= m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\emptyset) Q(\emptyset) + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1\}) Q(\{1\}) \\
&+ m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{2\}) Q(\{2\}) + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1, 2\}) Q(\{1, 2\}) \\
&= \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(1) (1 - \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(2)) + \\
&(1 - \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(1)) \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(2) + \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(1) \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(2) \\
&= x_1(1 - x_2) + (1 - x_1)x_2 + x_1x_2 \\
&= x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_1x_2 + x_1x_2 \\
&= x_1 + x_2 - x_1x_2
\end{aligned}$$

con lo que  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\vee)$  es la tconorma suma probabilística.

5)  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\rightarrow)$  es la implicación Rechenbach. Nótese que

$$\begin{aligned}
Q_{\rightarrow}(\emptyset) &= \rightarrow (\eta^{-1}(\emptyset)) = \rightarrow (0, 0) = 1 \\
Q_{\rightarrow}(\{1\}) &= \rightarrow (\eta^{-1}(\{1\})) = \rightarrow (1, 0) = 0 \\
Q_{\rightarrow}(\{2\}) &= \rightarrow (\eta^{-1}(\{2\})) = \rightarrow (0, 1) = 1 \\
Q_{\rightarrow}(\{1, 2\}) &= \rightarrow (\eta^{-1}(\{1, 2\})) = \rightarrow (1, 1) = 1
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{F}}^A(x_1, x_2) \\
&= \mathcal{F}^A(Q_{\rightarrow})(\eta^{-1}(x_1, x_2)) \\
&= \mathcal{F}^A(Q_{\rightarrow})(\{x_1/1, x_2/2\}) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(\{1,2\})} m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(Y) Q(Y) \\
&= m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\emptyset) Q(\emptyset) + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1\}) Q(\{1\}) \\
&+ m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{2\}) Q(\{2\}) + m_{\{x_1/1, x_2/2\}}(\{1, 2\}) Q(\{1, 2\}) \\
&= (1 - \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(1))(1 - \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(2)) \\
&+ (1 - \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(1))\mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(2) + \mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(1)\mu_{\{x_1/1, x_2/2\}}(2) \\
&= (1 - x_1)(1 - x_2) + (1 - x_1)x_2 + x_1x_2 \\
&= 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 + x_2 - x_1x_2 + x_1x_2 \\
&= 1 - x_1 + x_1x_2
\end{aligned}$$

con lo que  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\rightarrow)$  es la función de implicación Rechenbach. ■

Además, en la demostración de las propiedades del modelo  $\mathcal{F}^A$  también necesitaremos los siguientes lemas:

**Lema 2** Sean  $X, Y \in \mathcal{P}(E)$  Conjuntos nítidos. Se cumple

$$m_X(Y) = \begin{cases} 0 & : X \neq Y \\ 1 & : X = Y \end{cases}$$

**Demostración.** Evidente, ya que

$$m_X(Y) = \prod_{e \in Y} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} (1 - \mu_X(e))$$

y al ser  $X$  nítido  $\mu_X(e) = 1$  si  $e \in E$  y  $\mu_X(e) = 0$  si  $e \notin E$ . ■

**Lema 3** Sea  $X \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso  $E' \subseteq E$ ,  $E'' = E \setminus E'$  (esto es  $E' \cup E'' = E$ ). Sea  $Y \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto nítido. Entonces<sup>1</sup>,

$$m_X^E(Y) = m_X^{E'}(Y^{E'}) m_X^{E''}(Y^{E''})$$

<sup>1</sup>Recuérdese que mediante la notación  $X^{E'}$  donde  $X \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  es un conjunto borroso representamos la restricción de  $X$  al universo de referencia  $E' \subseteq E$ .

**Demostración.** Por definición de  $m_X^{E'}(Y)$ . La probabilidad de  $m_X^{E'}(Y)$  es el producto de las probabilidades en sus proyecciones:

$$\begin{aligned} m_X^E(Y) &= \prod_{e \in Y} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} (1 - \mu_X(e)) \\ &= \prod_{e \in Y \cap E'} \mu_X(e) \prod_{e \in (E \setminus Y) \cap E'} (1 - \mu_X(e)) \\ &\quad \prod_{e \in Y \cap E''} \mu_X(e) \prod_{e \in (E \setminus Y) \cap E''} (1 - \mu_X(e)) \\ &= m_X^{E'}(Y^{E'}) m_X^{E''}(Y^{E''}) \end{aligned}$$

■

**Lema 4** *Sea*

$$\tilde{\vee}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

*la tconorma probabilística. Denotaremos por  $\tilde{\vee}(x_1, \dots, x_m)$  su versión  $m$ -aria; esto es,*

$$\tilde{\vee}(x_1, \dots, x_m) = \tilde{\vee}(x_1, \tilde{\vee}(x_2, \tilde{\vee}(x_3, \dots, \tilde{\vee}(x_{m-1}, x_m))))$$

*Se cumple que<sup>2</sup>*

$$\tilde{\vee}(x_1, \dots, x_m) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)$$

**Demostración.** La prueba se realiza por inducción.

Para el caso  $i = 2$ :

$$\tilde{\vee}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

y entonces

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - x_i) &= 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \\ &= 1 - (1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2) \\ &= x_1 + x_2 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Nótese que si definimos  $\tilde{\vee}(x) = x$  también se cumple que  $1 - \prod_{i=1}^1 (1 - x) = 1 - (1 - x) = x$ .

Además, si definimos  $\tilde{\vee}() = 0$  y  $\prod_{i \in \emptyset} = 1$  también se cumple la relación planteada.

Suposición de inducción: Caso  $i = m$

$$\tilde{V}(x_1, \dots, x_m) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)$$

Caso  $i = m + 1$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \tilde{V}(\tilde{V}(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}) \\ &= \tilde{V}\left(1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i), x_{m+1}\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i) + x_{m+1} - \left(\left(1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)\right) \times x_{m+1}\right) \\ &= \left(1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)\right) (1 - x_{m+1}) + x_{m+1} \\ &= (1 - x_{m+1}) - (1 - x_{m+1}) \prod_{i=1}^m (1 - x_i) + x_{m+1} \\ &= (1 - x_{m+1}) - \prod_{i=1}^{m+1} (1 - x_i) + x_{m+1} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{m+1} (1 - x_i) \end{aligned}$$

■

### A.1.1. El modelo $\mathcal{F}^A$ es un DFS

#### Axioma Z-1

Se cumple que

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}^A(Q)) = Q \quad \text{si } n \leq 1$$

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario,  $Y \in \mathcal{P}(E)$  nítido. Utilizando el lema 2 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^A(Q)(Y) &= \sum_{Z \in \mathcal{P}(E)} m_Y(Z) Q(Z) \\ &= m_Y(Y) Q(Y) \\ &= Q(Y) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{U}(\mathcal{F}(Q))(Y) = Q(Y)$  para todo  $Y \in \mathcal{P}(E)$ . ■

### Axioma Z-2

Se cumple que

$$\mathcal{F}^A(Q) = \tilde{\pi}_e \quad \text{si } Q = \pi_e \text{ para algún } e \in E$$

**Demostración.** Utilizando el lema 3

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^A(\pi_e)(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \pi_e(Y) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \chi_Y(e) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) | e \in Y} m_X(Y) \\ &= \sum_{\{e\} \subseteq Y \subseteq E} m_X(Y) \\ &= \sum_{\{e\} \subseteq Y \subseteq E} \mu_X(e) m_X^{E \setminus \{e\}}(Y \setminus \{e\}) \\ &= \mu_X(e) \sum_{\emptyset \subseteq Y \subseteq E \setminus \{e\}} m_X^{E \setminus \{e\}}(Y) \\ &= \mu_X(e) \end{aligned}$$

■

### Axioma Z-3

Se cumple que

$$\mathcal{F}^A(Q \tilde{\square}) = \mathcal{F}^A(Q) \tilde{\square}, \quad n > 0$$

En la demostración de este axioma nos apoyaremos en las demostraciones de las propiedades de negación interna y externa.

#### Prueba de la propiedad de negación externa

Tenemos que demostrar que

$$\mathcal{F}^A(\tilde{\neg}Q) = \tilde{\neg}\mathcal{F}^A(Q)$$

En el lema 1 hemos establecido que la operación de negación inducida por el modelo es la negación estándar.

**Demostración.** Desarrollando

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(\neg Q)(X_1, \dots, X_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) (\neg Q)(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) \neg(Q(Y_1, \dots, Y_n)) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) (1 - Q(Y_1, \dots, Y_n)) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) \\
&\quad - \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} Q(Y_1, \dots, Y_n) m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) \\
&= 1 - \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n) \\
&= \neg(\mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n))
\end{aligned}$$

■

### Prueba de la propiedad de negación interna

Tenemos que demostrar que

$$\mathcal{F}^A(Q\neg) = \mathcal{F}^A(Q) \neg$$

**Lema 5** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ . Entonces se cumple

$$m_X(Y) = m_{\neg X}(\neg Y)$$

**Demostración.** Desarrollando

$$\begin{aligned}
m_X(Y) &= \Pr(\text{representative}_X = Y) \\
&= \prod_{e \in Y} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} (1 - \mu_X(e)) \\
&= \prod_{e \in Y} \tilde{\sim} \mu_X(e) \prod_{e \in E \setminus Y} \tilde{\sim} \mu_X(e) \\
&= \prod_{e \in E \setminus Y} \tilde{\sim} \mu_X(e) \prod_{e \in Y} \tilde{\sim} \mu_X(e) \\
&= \prod_{e \in E \setminus Y} \mu_{\sim X}(e) \prod_{e \in E \setminus (E \setminus Y)} \tilde{\sim} \mu_{\sim X}(e) \\
&= \prod_{e \in E \setminus Y} \mu_{\sim X}(e) \prod_{e \in E \setminus (E \setminus Y)} (1 - \mu_{\sim X}(e)) \\
&= \Pr(\text{representative}_{\sim X} = E \setminus Y) \\
&= m_{\sim X}(\neg Y)
\end{aligned}$$

■

Prueba de la propiedad:

**Demostración.** Desarrollando

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^A(Q\neg)(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) (Q\neg)(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, \neg Y_n)
\end{aligned}$$

y utilizando el lema 5 la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
\dots &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{\sim X_n}(\neg Y_n) Q(Y_1, \dots, \neg Y_n) \\
\dots &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{\sim X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \\
\dots &= \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, \sim X_n)
\end{aligned}$$

■

A partir de las propiedades de negación externa e interna se demuestra trivial-

mente la dualidad ya que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^A(Q\Box) &= \mathcal{F}^A(\neg Q\neg) \\ &= \neg\mathcal{F}^A(Q)\neg \\ &= \mathcal{F}^A(Q)\Box\end{aligned}$$

#### Axioma Z-4

Se cumple que

$$\mathcal{F}(Q\cup) = \mathcal{F}(Q)\tilde{\cup}, \quad n > 0 \quad (\text{A.1})$$

Para demostrar este axioma demostraremos primero que se cumple

$$\mathcal{F}(Q\cap) = \mathcal{F}(Q)\tilde{\cap}, \quad n > 0 \quad (\text{A.2})$$

En la demostración de A.2 se utilizarán los siguientes resultados:

**Lema 6** Sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos,  $R \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto nítido. Se cumple

$$\sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)/Y_1 \cap Y_2 = R} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) = m_{X_1 \tilde{\cap} X_2}(R) \quad (\text{A.3})$$

donde  $X_1 \tilde{\cap} X_2$  se define utilizando la *tnorma* inducida.

**Demostración.** Sea  $E' = E \setminus R$ . Se utilizará el lema 3.

Nótese que

$$m_{X_1 \tilde{\cap} X_2}(R) = \prod_{e \in R} \mu_{X_1}(e) \mu_{X_2}(e) \prod_{e \in E \setminus R} (1 - \mu_{X_1}(e) \mu_{X_2}(e)) \quad (\text{A.4})$$

Como la suma A.3 se restringe a los  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  tales que

$$Y_1 \cap Y_2 = R$$

entonces,

$$\begin{aligned}& \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)/Y_1 \cap Y_2 = R} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) \\ &= \sum_{R \subseteq Y_1 \subseteq E} \sum_{R \subseteq Y_2 \subseteq E/Y_1 \cap Y_2 = R} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) \\ &= \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{\emptyset \subseteq C_2 \subseteq E'/C_1 \cap C_2 = \emptyset} m_{X_1}(C_1 \cup R) m_{X_2}(C_2 \cup R)\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y utilizando el lema 3

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{\emptyset \subseteq C_2 \subseteq E'/C_1 \cap C_2 = \emptyset} m_{X_1}^{E'}(C_1) \prod_{e \in R} \mu_{X_1}(e) m_{X_2}^{E'}(C_2) \prod_{e \in R} \mu_{X_2}(e) \\
&= \prod_{e \in R} \mu_{X_1}(e) \mu_{X_2}(e) \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{\emptyset \subseteq C_2 \subseteq E'/C_1 \cap C_2 = \emptyset} m_{X_1}^{E'}(C_1) m_{X_2}^{E'}(C_2) \\
&= \prod_{e \in R} \mu_{X_1}(e) \mu_{X_2}(e) \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E'} m_{X_1}^{E'}(C_1) m_{X_2}^{E'}(C_2 \setminus C_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad A.4 se cumplirá si se cumple que

$$\sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E'} m_{X_1}^{E'}(C_1) m_{X_2}^{E'}(C_2 \setminus C_1) = \prod_{e \in E'} (1 - \mu_{X_1}(e) \mu_{X_2}(e)) \quad (\text{A.6})$$

La prueba se realiza por inducción en la cardinalidad de  $E'$ . Denotaremos por  $E^i = \{e_1, \dots, e_i\}$  un conjunto referencial de  $i$  elementos.

**Caso  $i = 1$**  ( $|E'| = 1$  ( $E' = E^1 = \{e_1\}$ )):

$$\begin{aligned}
&\sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E'} m_{X_1}(C_1) m_{X_2}(C_2 \setminus C_1) \\
&= \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq \{e_1\}} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq \{e_1\}} m_{X_1}(C_1) m_{X_2}(C_2 \setminus C_1) \\
&= m_{X_1}(\emptyset) (m_{X_2}(\emptyset) + m_{X_2}(\{e_1\})) + m_{X_1}(\{e_1\}) m_{X_2}(\emptyset) \\
&= (1 - \mu_{X_1}(e_1)) (1 - \mu_{X_2}(e_1) + \mu_{X_2}(e_1)) + \mu_{X_1}(e_1) (1 - \mu_{X_2}(e_1)) \\
&= 1 - \mu_{X_1}(e_1) + \mu_{X_1}(e_1) (1 - \mu_{X_2}(e_1)) \\
&= 1 - \mu_{X_1}(e_1) + \mu_{X_1}(e_1) - \mu_{X_1}(e_1) \mu_{X_2}(e_1) \\
&= 1 - \mu_{X_1}(e_1) \mu_{X_2}(e_1)
\end{aligned}$$

**Suposición de inducción: Caso  $i = m$**  ( $|E'| = m$ , ( $E' = E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ )).

Suponemos que

$$\sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E'} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E'} m_{X_1}(C_1) m_{X_2}(C_2 \setminus C_1) = \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i))$$

**Caso  $i = m + 1$** :  $|E'| = m + 1$ , ( $E' = E^{m+1} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ )

Nótese que si  $e_{m+1} \in C$  entonces

$$\begin{aligned} m_{X_1}(C) &= \prod_{e \in C} \mu_{X_1}(e) \prod_{e \notin C} (1 - \mu_{X_1}(e)) \\ &= \mu_{X_1}(e_{m+1}) \prod_{e \in C \setminus \{e_{m+1}\}} \mu_{X_1}(e) \prod_{e \notin C} (1 - \mu_{X_1}(e)) \\ &= \mu_{X_1}(e_{m+1}) m_{X_1}^{E^{m+1}}(C \setminus \{e_{m+1}\}) \end{aligned}$$

Mientras que si  $e_{m+1} \notin C$  tendremos que

$$\begin{aligned} m_{X_1}(C) &= \prod_{e \in C} \mu_{X_1}(e) \prod_{e \notin C} (1 - \mu_{X_1}(e)) \\ &= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) \prod_{e \in C} \mu_{X_1}(e) \prod_{e \notin C \cup \{e_{m+1}\}} (1 - \mu_{X_1}(e)) \\ &= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) m_{X_1}^{E^m}(C) \end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned} & \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E^{m+1}} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E^{m+1}} m_{X_1}(C_1) m_{X_2}(C_2 \setminus C_1) \tag{A.7} \\ &= \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} m_{X_1}(M_1) m_{X_2}(M_2 \setminus M_1) + \\ & \quad \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} m_{X_1}(M_1) m_{X_2}(M_2 \cup \{e_{m+1}\} \setminus M_1) + \\ & \quad \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} m_{X_1}(M_1 \cup \{e_{m+1}\}) m_{X_2}(M_2 \cup \{e_{m+1}\} \setminus M_1 \cup \{e_{m+1}\}) \end{aligned}$$

Nótese que como  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq E^{m+1}$  no se puede dar la situación de que  $e_{m+1} \in C_1$  y  $e_{m+1} \notin C_2$ .

A continuación evaluamos los tres sumandos de la expresión A.7. En el cálculo se utiliza la hipótesis de inducción.

Primer sumando:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} m_{X_1}(M_1) m_{X_2}(M_2 \setminus M_1) \quad (\text{A.8}) \\
&= \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) m_{X_1}^{E^m}(M_1) (1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) m_{X_2}^{E^m}(M_2 \setminus M_1) \\
&= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) (1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E^m} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E^m} m_{X_1}^{E^m}(C_1) m_{X_2}^{E^m}(C_2 \setminus C_1) \\
&= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) (1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i))
\end{aligned}$$

Segundo sumando:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} m_{X_1}(M_1) m_{X_2}(M_2 \cup \{e_{m+1}\} \setminus M_1) \quad (\text{A.9}) \\
&= \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) m_{X_1}^{E^m}(M_1) \mu_{X_2}(e_{m+1}) m_{X_2}^{E^m}(M_2 \setminus M_1) \\
&= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) \mu_{X_2}(e_{m+1}) \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E^m} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E^m} m_{X_1}^{E^m}(C_1) m_{X_2}^{E^m}(C_2 \setminus C_1) \\
&= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) \mu_{X_2}(e_{m+1}) \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i))
\end{aligned}$$

Tercer sumando:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} m_{X_1}(M_1 \cup \{e_{m+1}\}) m_{X_2}(M_2 \cup \{e_{m+1}\} \setminus M_1 \cup \{e_{m+1}\}) \quad (\text{A.10}) \\
&= \sum_{\emptyset \subseteq M_1 \subseteq E^m} \sum_{M_1 \subseteq M_2 \subseteq E^m} \mu_{X_1}(e_{m+1}) m_{X_1}^{E^m}(M_1) (1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) m_{X_2}^{E^m}(M_2 \setminus M_1) \\
&= \mu_{X_1}(e_{m+1}) (1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i))
\end{aligned}$$

Y utilizando las expresiones A.8, A.9 y A.10:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\emptyset \subseteq C_1 \subseteq E^{m+1}} \sum_{C_1 \subseteq C_2 \subseteq E^{m+1}} m_{X_1}(C_1) m_{X_2}(C_2 \setminus C_1) \\
&= \dots \\
&= ((1 - \mu_{X_1}(e_{m+1}))(1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) + (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1}))\mu_{X_2}(e_{m+1})) \\
&\mu_{X_1}(e_{m+1})(1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) \times \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i)\mu_{X_2}(e_i)) \\
&= ((1 - \mu_{X_1}(e_{m+1}))(1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) + \mu_{X_2}(e_{m+1})) \\
&\mu_{X_1}(e_{m+1})(1 - \mu_{X_2}(e_{m+1})) \times \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i)\mu_{X_2}(e_i)) \\
&= ((1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})) + \mu_{X_1}(e_{m+1}) - \mu_{X_1}(e_{m+1})\mu_{X_2}(e_{m+1})) \\
&\times \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i)\mu_{X_2}(e_i)) \\
&= (1 - \mu_{X_1}(e_{m+1})\mu_{X_2}(e_{m+1})) \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i)\mu_{X_2}(e_i)) \\
&= \prod_{i=1}^{m+1} (1 - \mu_{X_1}(e_i)\mu_{X_2}(e_i))
\end{aligned}$$

De esta manera se concluye la prueba de la igualdad A.6, con lo que el lema se satisface. ■

**Lema 7** Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario. Se cumple

$$\sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) Q(Y_1 \cap Y_2) = \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1 \tilde{\cap} X_2}(Y) Q(Y)$$

**Demostración.** Utilizando el lema 6:

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) Q(Y_1 \cap Y_2) \\
&= \sum_{R \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)/Y_1 \cap Y_2 = R} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) Q(R) \\
&= \sum_{R \in \mathcal{P}(E)} Q(R) \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E)/Y_1 \cap Y_2 = R} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) \\
&= \sum_{R \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1 \tilde{\cap} X_2}(R) Q(R) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1 \tilde{\cap} X_2}(Y) Q(Y)
\end{aligned}$$

■

A continuación se prueba el cumplimiento de la expresión A.2:

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(Q \cap)(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) (Q \cap)(Y_1, \dots, Y_{n+1}) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) Q(Y_1, \dots, Y_n \cap Y_{n+1}) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n-1}}(Y_{n-1}) \\
& \quad \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_n}(Y_n) m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n \cap Y_{n+1}) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n-1}}(Y_{n-1}) \\
& \quad \sum_{R \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)/Y_n \cap Y_{n+1} = R} m_{X_n}(Y_n) m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, R) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n-1}}(Y_{n-1}) \\
& \quad \sum_{R \in \mathcal{P}(E)} m_{X_n \tilde{\cap} X_{n+1}}(R) Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, R)
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado el lema 7. Y así,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(Q \cap) (X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \\
&= \dots \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n-1}}(Y_{n-1}) \\
& \quad \sum_{R \in \mathcal{P}(E)} m_{X_n \tilde{\cap} X_{n+1}}(R) Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, R) \\
&= \mathcal{F}^A(Q) (X_1, \dots, X_n \tilde{\cap} X_{n+1})
\end{aligned}$$

■

Se demuestra ahora el cumplimiento del axioma Z-4:

$$\mathcal{F}(Q \cup) = \mathcal{F}(Q) \tilde{\cup}, \quad n > 0$$

**Demostración.** Nótese que para un cuantificador semi-borroso  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  se cumple

$$\begin{aligned}
(Q \neg \cap \neg \tau_n \neg) &= (f' : (Y'_1, \dots, Y'_n) \rightarrow Q(Y'_1, \dots, \neg Y'_n)) \cap \neg \tau_n \neg \\
&= (f'' : (Y''_1, \dots, Y''_n, Y''_{n+1}) \rightarrow f'(Y''_1, \dots, Y''_n \cap Y''_{n+1})) \neg \tau_n \neg \\
&= (f'' : (Y''_1, \dots, Y''_n, Y''_{n+1}) \rightarrow Q(Y''_1, \dots, \neg(Y''_n \cap Y''_{n+1}))) \neg \tau_n \neg \\
&= (f''' : (Y'''_1, \dots, Y'''_n, Y'''_{n+1}) \rightarrow f'' : (Y'''_1, \dots, Y'''_n, \neg Y'''_{n+1})) \tau_n \neg \\
&= (f''' : (Y'''_1, \dots, Y'''_n, Y'''_{n+1}) \rightarrow Q : (Y'''_1, \dots, \neg(Y'''_n \cap \neg Y'''_{n+1}))) \tau_n \neg \\
&= (f'''' : (Y''''_1, \dots, Y''''_n, Y''''_{n+1}) \rightarrow f''' : (Y''''_1, \dots, Y''''_{n+1}, Y''''_n)) \neg \\
&= (f'''' : (Y''''_1, \dots, Y''''_n, Y''''_{n+1}) \rightarrow Q : (Y''''_1, \dots, \neg(Y''''_{n+1} \cap \neg Y''''_n))) \neg \\
&= (f'''' : (Y''''_1, \dots, Y''''_n, Y''''_{n+1}) \rightarrow f'''' : (Y''''_1, \dots, Y''''_n, \neg Y''''_{n+1})) \\
&= (f'''' : (Y''''_1, \dots, Y''''_n, Y''''_{n+1}) \rightarrow Q(Y''''_1, \dots, \neg(\neg Y''''_n \cap \neg Y''''_{n+1})))
\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
(Q \neg \cap \neg \tau_n \neg)(Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}) &= Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, \neg(\neg Y_n \cap \neg Y_{n+1})) \\
&= Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n \cup Y_{n+1})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando las propiedades de negación interna, trasposición de

argumentos (que se cumple trivialmente) y la expresión A.2 tendremos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^A(Q \cup)(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) &= \mathcal{F}^A(Q \neg \cap \neg \tau_n \neg)(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \\ &= \mathcal{F}^A(Q) \tilde{\neg} \tilde{\cap} \tilde{\neg} \tau_n \tilde{\neg}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \\ &= \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, \tilde{\neg}(\tilde{\neg} X_n \tilde{\cap} \tilde{\neg} X_{n+1})) \\ &= \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n \tilde{\cup} X_{n+1})\end{aligned}$$

donde en el último paso se utiliza que  $\tilde{\neg}$  y  $\tilde{\cup}$  se construyen a partir de operaciones duales. ■

### Axioma Z-5

Se cumple que

$$\begin{aligned}\text{Si } Q \text{ es no creciente en su argumento } n, \text{ entonces} \\ \mathcal{F}(Q) \text{ es no creciente en su argumento } n, \quad n > 0\end{aligned}\tag{A.11}$$

**Demostración.** Se demostrará primero el caso particular de cuantificadores semi-borroso unarios.

Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario no creciente. Entonces se cumple que  $\mathcal{F}^A(Q)(X)$  es también no creciente.

Se procederá por inducción en la cardinalidad del referencial:

**Caso**  $i = 1$ ; es decir, el referencial contiene un elemento ( $E = E^1 = \{e_1\}$ ).

Sean  $X, X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  tales que  $X \subseteq X'$ . Como

$$\mu_X(e_1) \leq \mu_{X'}(e_1)$$

entonces se cumple que

$$-\mu_X(e_1) \geq -\mu_{X'}(e_1) \Rightarrow 1 - \mu_X(e_1) \geq 1 - \mu_{X'}(e_1)$$

Como  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  es monótono no creciente para  $h \geq 0$  se cumple

$$aQ(\emptyset) + bQ(\{e_1\}) \geq (a - h)Q(\emptyset) + (b + h)Q(\{e_1\})\tag{A.12}$$

ya que

$$(a - h)Q(\emptyset) + (b + h)Q(\{e_1\}) = aQ(\emptyset) + bQ(\{e_1\}) + h(Q(\{e_1\}) - Q(\emptyset))$$

y  $Q(\{e_1\}) - Q(\emptyset) \leq 0$  al ser  $Q$  no creciente.

Sea  $h = \mu_{X'}(e_1) - \mu_X(e_1) \geq 0$ . Por A.12 tenemos que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(Q)(X) \\
&= (1 - \mu_X(e_1))Q(\emptyset) + \mu_X(e_1)Q(\{e_1\}) \\
&\geq (1 - \mu_X(e_1) - (\mu_{X'}(e_1) - \mu_X(e_1)))Q(\emptyset) + \\
&+ (\mu_X(e_1) + (\mu_{X'}(e_1) - \mu_X(e_1)))Q(\{e_1\}) \\
&= (1 - \mu_X(e_1) - \mu_{X'}(e_1) + \mu_X(e_1))Q(\emptyset) + (\mu_X(e_1) + \mu_{X'}(e_1) - \mu_X(e_1))Q(\{e_1\}) \\
&= (1 - \mu_{X'}(e_1))Q(\emptyset) + \mu_{X'}(e_1)Q(\{e_1\}) \\
&= \mathcal{F}^A(Q)(X')
\end{aligned}$$

con lo que la propiedad es cierta para un referencial de un elemento.

**Suposición de inducción: Caso  $i = m$**  ( $E = E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ ). Para  $X, X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E^m)$  tales que  $X \subseteq X'$  se cumple que  $\mathcal{F}^A(Q)(X) \geq \mathcal{F}^A(Q)(X')$ .

**Caso  $i = m + 1$**  ( $E = E^{m+1} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ ).

A partir de  $Q : \mathcal{P}(E^{m+1}) \rightarrow \mathbf{I}$  definimos los cuantificadores semi-borrosos  $Q^a : \mathcal{P}(E^m) \rightarrow \mathbf{I}$  y  $Q^b : \mathcal{P}(E^m) \rightarrow \mathbf{I}$  como

$$\begin{aligned}
Q^a(X) &= Q(X), X \in \mathcal{P}(E^m) \\
Q^b(X) &= Q(X \cup \{e_{m+1}\}), X \in \mathcal{P}(E^m)
\end{aligned}$$

Nótese que  $Q^a$  y  $Q^b$  son monótonos no crecientes sobre  $E^m$ .

Sea  $h = (\mu_{X'}(e_{m+1}) - \mu_X(e_{m+1}))$ . Desarrollando

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(Q)(X) \tag{A.13} \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^{m+1})} m_X(Y) Q(Y) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} (1 - \mu_X(e_{m+1})) m_X(Y) Q(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} \mu_X(e_{m+1}) m_X(Y) Q(Y \cup \{e_{m+1}\}) \\
&\geq (1 - \mu_X(e_{m+1}) - h) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y) + \\
&+ (\mu_X(e_{m+1}) + h) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y \cup \{e_{m+1}\}) \\
&= (1 - \mu_X(e_{m+1}) - (\mu_{X'}(e_{m+1}) - \mu_X(e_{m+1}))) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y) \\
&+ (\mu_X(e_{m+1}) + (\mu_{X'}(e_{m+1}) - \mu_X(e_{m+1}))) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y \cup \{e_{m+1}\}) \\
&= (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y) + \\
&+ \mu_{X'}(e_{m+1}) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y \cup \{e_{m+1}\})
\end{aligned}$$

por las mismas razones que las explicadas para la expresión A.12.

Pero por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q^a(Y) &\geq \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_{X'}(Y) Q^a(Y) \\
\sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q^b(Y) &\geq \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_{X'}(Y) Q^b(Y)
\end{aligned}$$

al ser  $Q^a : \mathcal{P}(E^m) \rightarrow \mathbf{I}$  y  $Q^b : \mathcal{P}(E^m) \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos monótonos no crecientes sobre un referencial de  $m$  elementos. Continuando el desarrollo de A.13

$$\begin{aligned}
& (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y) + \mu_{X'}(e_{m+1}) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_X(Y) Q(Y \cup \{e_{m+1}\}) \\
&\geq (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_{X'}(Y) Q^a(Y) + \mu_{X'}(e_{m+1}) \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_{X'}(Y) Q^b(Y) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m)} m_{X'}(Y) Q(Y) \\
&= \mathcal{F}^A(Q)(X')
\end{aligned}$$

De esta manera se finaliza la prueba de la propiedad para el caso unario.

Se procederá ahora a la prueba para el caso  $n$ -ario. Supongamos un cuantificador semi-borroso  $n$ -ario  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  monótono no creciente en su argumento  $n$ . Desarrollando

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n) \\ &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n-1}}(Y_{n-1}) \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

En la expresión

$$\sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n)$$

los conjuntos  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  son constantes. El cuantificador semi-borroso unario  $Q' : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$

$$Q'(Y) = Q(Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y)$$

es monótono no creciente por lo que  $\mathcal{F}^A(Q')$  también es monótono no creciente. Como esto se cumple para cualquier elección de

$$Y_1, \dots, Y_{n-1} \in \mathcal{P}(E)$$

la proposición se cumple. ■

### Axioma Z-6

Se cumple que

$$\mathcal{F}\left(Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{f}_i\right) = \mathcal{F}(Q) \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}(f_i) \quad (\text{A.14})$$

donde  $f_1, \dots, f_n : E' \rightarrow E, E' \neq \emptyset$

Para demostrar este axioma necesitamos algunos resultados previos.

### Cuantificador existencial

**Proposición 4** ( $\mathcal{F}^A(\exists)(X)$ ) Sea  $X \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Se cumple

$$\mathcal{F}^A(\exists)(X) = \sup \left\{ \widetilde{\vee}_{i=1}^m \mu_X(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ if } i \neq j \right\}$$

**Demostración.** Sea  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Utilizando el lema 4

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^A(\exists)(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) Q(Y) \\
 &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) | Y \neq \emptyset} m_X(Y) \\
 &= 1 - m_X(\emptyset) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \mu_X(e_i)) \\
 &= \tilde{\bigvee}_{i=1}^m \mu_X(e_i)
 \end{aligned}$$

■

### Quantificador universal

**Proposición 5** ( $\mathcal{F}^A(\forall)(X)$ ) Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Se cumple

$$\mathcal{F}^A(\forall)(X) = \inf \left\{ \tilde{\bigwedge}_{i=1}^m \mu_X(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\}$$

**Demostración.** Sea  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^A(\forall)(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \forall(Y) \\
 &= m_X(E) \\
 &= \prod_{i=1}^m \mu_X(e_i)
 \end{aligned}$$

■

### Principio de extensión inducido.

Para calcular el principio de extensión inducido por el modelo  $\mathcal{F}^A$  utilizamos la definición 38.

**Notación 50** ( $\tilde{\vee} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$ ) Sea  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  y  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Por  $\tilde{\vee} : \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  denotaremos la generalización de la tconorma inducida a conjuntos borrosos; es decir,

$$\tilde{\vee}(X) = \begin{cases} \tilde{\vee}(\mu_X(e_1), \tilde{\vee}(\dots, \tilde{\vee}(\mu_X(e_{m-1}), \mu_X(e_m)))) & : m > 0 \\ 0 & : m = 0 \end{cases}$$

**Proposición 6** Sea  $f : E \rightarrow E'$  (donde  $E, E' \neq \emptyset$ ). Sea  $e'_i \in E'$  un elemento cualquiera y sea  $\widehat{f^{-1}}(e'_i) = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{k_i}}\}$  la imagen inversa de  $e'_i$ . Entonces el principio de extensión inducido por el QFM  $\mathcal{F}^A$  para la función  $f$  es

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{f}(X)}(e'_i) &= \begin{cases} \widetilde{\vee} \left( \left\{ \mu_X(e_{i_1})/e_{i_1}, \dots, \mu_X(e_{i_{k_i}})/e_{i_{k_i}} \right\} \right) & : k_i \geq 1 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.15}) \\ &= \mathcal{F}^A \left( \exists_{\widehat{f^{-1}}(e'_i)} \right) \left( X^{\widehat{f^{-1}}(e'_i)} \right) \end{aligned}$$

donde  $\exists_{\widehat{f^{-1}}(e'_i)}$  representa el cuantificador existencial sobre el universo de referencia  $\widehat{f^{-1}}(e'_i)$  y  $X^{\widehat{f^{-1}}(e'_i)}$  es la proyección del conjunto borroso  $X$  sobre  $\widehat{f^{-1}}(e'_i)$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mu_{\widehat{\mathcal{F}^A}(f)(X)}(e') &= \mathcal{F}^A \left( \chi_{\widehat{f}(\cdot)}(e') \right) (X) \quad (\text{A.16}) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \chi_{\widehat{f}(\cdot)}(e')(Y) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \chi_{\widehat{f}(Y)}(e') \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \begin{cases} 0 & : e' \notin \widehat{f}(Y) \\ 1 & : e' \in \widehat{f}(Y) \end{cases} \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) | \exists e \in Y, f(e)=e'} m_X(Y) \end{aligned}$$

Si  $\widehat{f^{-1}}(e') = \emptyset$  la suma anterior es 0 y estamos en la segunda situación de la expresión A.15.

Supondremos pues que  $\widehat{f^{-1}}(e') \neq \emptyset$ . ■

Nótese que cualquier  $Y \in \mathcal{P}(E)$  que cumpla  $\exists e \in Y, f(e) = e'$  debe tener una intersección no vacía con la imagen inversa de  $e'$  ( $\widehat{f^{-1}}(e')$ ). Como todo  $Y$  cumpliendo dicha condición se puede descomponer en la parte que interseca con  $\widehat{f^{-1}}(e')$  y la

parte que no interseca con  $\widehat{f^{-1}}(e')$  ( $E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')$ ) la expresión A.16 es igual a

$$\begin{aligned}
\mu_{\widehat{\mathcal{F}^A}(f)(X)}(e') &= \dots \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f^{-1}}(e')} \sum_{\emptyset \subseteq R \subseteq E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')} m_X(M \cup R) \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f^{-1}}(e')} \sum_{\emptyset \subseteq R \subseteq E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')} m_X^{\widehat{f^{-1}}(e')}(M) m_X^{E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')}(R) \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f^{-1}}(e')} m_X^{\widehat{f^{-1}}(e')}(M) \sum_{\emptyset \subseteq R \subseteq E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')} (R) m_X^{E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')}(R) \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f^{-1}}(e')} m_{X_1}^{\widehat{f^{-1}}(e')}(M) \cdot 1
\end{aligned}$$

Ya que  $\emptyset \subseteq R \subseteq E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')$  contiene todos los subconjuntos de  $E \setminus \widehat{f^{-1}}(e')$ . Así,

$$\begin{aligned}
\mu_{\widehat{\mathcal{F}^A}(f)(X)}(e') &= \dots \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f^{-1}}(e')} m_X^{\widehat{f^{-1}}(e')}(M) \\
&= \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f^{-1}}(e')}\right)\left(X^{\widehat{f^{-1}}(e')}\right)
\end{aligned}$$

Si denotamos  $\widehat{f^{-1}}(e') = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$  y utilizamos la proposición 4 obtenemos

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}^A}(f)(X)}(e') = \widetilde{\vee}(\{\mu_X(e_{i_1})/e_{i_1}, \dots, \mu_X(e_{i_k})/e_{i_k}\})$$

A continuación demostramos el cumplimiento de

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{f}_i\right) &= \mathcal{F}(Q) \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}(f_i) \\
\text{donde } f_1, \dots, f_n &: E' \rightarrow E, E' \neq \emptyset
\end{aligned}$$

**Demostración.** Sean  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ,  $E' = \{e_1, \dots, e_{m'}\}$  finitos,  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso,  $X'_1, \dots, X'_n \in \mathcal{P}(E')$  conjuntos borrosos y  $f_1, \dots, f_n : E' \rightarrow E, E' \neq \emptyset$ . Nótese que  $\widehat{\mathcal{F}}(f_i)(X'_i) \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$ . Desarrollando

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^A(Q) \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}^A}(f_i)(X'_1, \dots, X'_n) \tag{A.17} \\
&= \mathcal{F}^A(Q) \circ \left(\widehat{\mathcal{F}^A}(f_1)(X'_1), \dots, \widehat{\mathcal{F}^A}(f_n)(X'_n)\right) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{\widehat{\mathcal{F}^A}(f_1)(X'_1)} \dots m_{\widehat{\mathcal{F}^A}(f_n)(X'_n)} Q(Y_1, \dots, Y_n)
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado 6 podemos reescribir  $\widehat{\mathcal{F}}^A(f_i)(X'_i) \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  como

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathcal{F}}^A(f_i)(X'_i) \\ &= \left\{ \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_1)}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_1)}\right)/e_1, \dots, \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_m)}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_m)}\right)/e_m \right\} \end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión A.17

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \tag{A.18} \\ & m \left\{ \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_1^{-1}(e_1)}\right)\left((X'_1)^{\widehat{f}_1^{-1}(e_1)}\right)/e_1, \dots, \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_1^{-1}(e_m)}\right)\left((X'_1)^{\widehat{f}_1^{-1}(e_m)}\right)/e_m \right\} (Y_1) \dots \\ & m \left\{ \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_n^{-1}(e_1)}\right)\left((X'_n)^{\widehat{f}_n^{-1}(e_1)}\right)/e_1, \dots, \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_n^{-1}(e_m)}\right)\left((X'_n)^{\widehat{f}_n^{-1}(e_m)}\right)/e_m \right\} (Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

Sea  $Y_j = \{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\} \in \mathcal{P}(E)$ ,  $E \setminus Y_j = \{e_{j_{k+1}}, \dots, e_{j_m}\}$ . Se calculará la masa de probabilidad  $m_{\widehat{\mathcal{F}}^A(f_i)(X'_i)}(Y_j)$ :

$$\begin{aligned} & m_{\widehat{\mathcal{F}}^A(f_i)(X'_i)}(Y_j) \\ &= m \left\{ \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_1)}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_1)}\right)/e_1, \dots, \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_m)}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_m)}\right)/e_m \right\} \left(\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}\right) \\ &= \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1})}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1})}\right) \dots \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k})}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k})}\right) \\ & \left(1 - \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_{k+1}})}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_{k+1}})}\right)\right) \dots \left(1 - \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_m})}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_m})}\right)\right) \end{aligned}$$

Y por dualidad sabemos que  $\widetilde{\mathcal{F}}^A(\exists) = \mathcal{F}^A(\forall) \widetilde{\phantom{\mathcal{F}}}$ . Así,

$$\begin{aligned} & m_{\widehat{\mathcal{F}}^A(f_i)(X'_i)}(Y_j) \tag{A.19} \\ &= \dots \\ &= \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1})}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1})}\right) \dots \mathcal{F}^A\left(\exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k})}\right)\left((X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k})}\right) \\ & \mathcal{F}\left(\forall_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_{k+1}})}\right)\left(\widetilde{(X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_{k+1}})}}\right) \dots \mathcal{F}^A\left(\forall_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_m})}\right)\left(\widetilde{(X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_m})}}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^A \left( \exists_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} \right) \left( (X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} \right) &= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} m_{(X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})}}^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} (M) \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} m_{X'_i}^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} (M) \\
\mathcal{F}^A \left( \forall_{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} \right) \left( \widetilde{\mu}_{(X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})}} \right) &= \prod_{e' \in \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} \widetilde{\mu}_{(X'_i)^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})}}(e') \\
&= \prod_{e' \in \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_r})} \widetilde{\mu}_{X'_i}(e')
\end{aligned}$$

entonces la expresión A.19 es equivalente a

$$\begin{aligned}
&m_{\widehat{\mathcal{F}^A(f_i)}(X'_i)}(Y_j) \tag{A.20} \\
&= \dots \\
&= \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1})} m_{X'_i}^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1})} (M) \cdot \dots \cdot \sum_{\emptyset \subset M \subseteq \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k})} m_{X'_i}^{\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k})} (M) \\
&\cdot \prod_{e' \in E' \setminus (\widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1}) \cup \dots \cup \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k}))} \widetilde{\mu}_{X'_i}(e') \\
&= \sum_{\substack{M \in \mathcal{P}(E') \\ \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_1}) \cap Y_j \neq \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_k}) \cap Y_j \neq \emptyset \wedge \\ \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_{k+1}}) \cap Y_j = \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_i^{-1}(e_{j_m}) \cap Y_j = \emptyset}} m_{X'_i} (M)
\end{aligned}$$

Es decir, la masa de probabilidad  $m_{\widehat{\mathcal{F}^A(f_i)}(X'_i)}(Y_j)$  se calcula a partir de las masas de probabilidad  $m_{X'_i}(M)$  asociada a los  $M \in \mathcal{P}(E')$  tales que la intersección con la imagen inversa de los  $e \in Y_j$  es no vacía y cuya intersección con los  $e \in E \setminus Y_j$  es vacía. Además, nótese que todo  $M \in \mathcal{P}(E')$  está asociado a un  $Y \in \mathcal{P}(E)$ ; es decir,  $\widehat{f}_i(M) = Y$  para algún  $Y$ . De esta manera, si los  $Y$ s recorren  $\mathcal{P}(E)$ , entonces los  $M$ s recorren  $\mathcal{P}(E')$ , con lo que continuando el desarrollo de la expresión A.18

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(Q) \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}^A(f_i)(X'_1, \dots, X'_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{\widehat{\mathcal{F}}^A(f_1)(X'_1)} \cdots m_{\widehat{\mathcal{F}}^A(f_n)(X'_n)}(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \dots \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m \left\{ \mathcal{F}^A \left( \exists_{\widehat{f}_1^{-1}(e_1)} \right) \left( (X'_1)^{\widehat{f}_1^{-1}(e_1)} \right) /_{e_1, \dots, \mathcal{F}^A \left( \exists_{\widehat{f}_1^{-1}(e_m)} \right) \left( (X'_1)^{\widehat{f}_1^{-1}(e_m)} \right) /_{e_m}} \right\} (Y_1) \\
&\dots m \left\{ \mathcal{F}^A \left( \exists_{\widehat{f}_n^{-1}(e_1)} \right) \left( (X'_n)^{\widehat{f}_n^{-1}(e_1)} \right) /_{e_1, \dots, \mathcal{F}^A \left( \exists_{\widehat{f}_n^{-1}(e_m)} \right) \left( (X'_n)^{\widehat{f}_n^{-1}(e_m)} \right) /_{e_m}} \right\} (Y_n) \\
&Q(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \dots \\
&= \sum_{\substack{Y_1 = \{e_{(Y_1)_1}, \dots, e_{(Y_1)_k}\} \in \mathcal{P}(E), \\ E \setminus Y_1 = \{e_{(Y_1)_{k+1}}, \dots, e_{(Y_1)_m}\}}} \cdots \sum_{\substack{Y_n = \{e_{(Y_n)_1}, \dots, e_{(Y_n)_k}\} \in \mathcal{P}(E), \\ E \setminus Y_n = \{e_{(Y_n)_{k+1}}, \dots, e_{(Y_n)_m}\}}} \\
&\quad \sum_{\substack{Y'_1 \in \mathcal{P}(E') \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_1}) \cap Y'_1 \neq \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_k}) \cap Y'_1 \neq \emptyset \wedge \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_{k+1}}) \cap Y'_1 = \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_m}) \cap Y'_1 = \emptyset}} m_{X'_1}(Y'_1) \dots \sum_{\substack{Y'_n \in \mathcal{P}(E') \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_1}) \cap Y'_n \neq \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_k}) \cap Y'_n \neq \emptyset \wedge \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_{k+1}}) \cap Y'_n = \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_m}) \cap Y'_n = \emptyset}} m_{X'_n}(Y'_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \sum_{\substack{Y_1 = \{e_{(Y_1)_1}, \dots, e_{(Y_1)_k}\} \in \mathcal{P}(E), \\ E \setminus Y_1 = \{e_{(Y_1)_{k+1}}, \dots, e_{(Y_1)_m}\}}} \cdots \sum_{\substack{Y_n = \{e_{(Y_n)_1}, \dots, e_{(Y_n)_k}\} \in \mathcal{P}(E), \\ E \setminus Y_n = \{e_{(Y_n)_{k+1}}, \dots, e_{(Y_n)_m}\}}} \\
&\quad \sum_{\substack{Y'_1 \in \mathcal{P}(E') \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_1}) \cap Y'_1 \neq \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_k}) \cap Y'_1 \neq \emptyset \wedge \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_{k+1}}) \cap Y'_1 = \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_1^{-1}(e_{(Y_1)_m}) \cap Y'_1 = \emptyset}} m_{X'_1}(Y'_1) \dots \sum_{\substack{Y'_n \in \mathcal{P}(E') \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_1}) \cap Y'_n \neq \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_k}) \cap Y'_n \neq \emptyset \wedge \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_{k+1}}) \cap Y'_n = \emptyset \wedge \dots \wedge \\ \widehat{f}_n^{-1}(e_{(Y_n)_m}) \cap Y'_n = \emptyset}} m_{X'_n}(Y'_n) Q(\widehat{f}_1(Y'_1), \dots, \widehat{f}_n(Y'_n)) \\
&= \sum_{Y'_1 \in \mathcal{P}(E')} m_{X'_1}(Y'_1) \dots \sum_{Y'_n \in \mathcal{P}(E')} m_{X'_n}(Y'_n) Q(\widehat{f}_1(Y'_1), \dots, \widehat{f}_n(Y'_n)) \\
&= \sum_{Y'_1 \in \mathcal{P}(E')} m_{X'_1}(Y'_1) \dots \sum_{Y'_n \in \mathcal{P}(E')} m_{X'_n}(Y'_n) \left( Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{f}_i \right) (Y'_1, \dots, Y'_n) \\
&= \mathcal{F} \left( Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{f}_i \right) (X'_1, \dots, X'_n)
\end{aligned}$$

tal como se quería demostrar. ■

### A.1.2. Propiedades del modelo $\mathcal{F}^A$ no derivadas del marco axiomático de los DFSs

#### Propiedad de inserción de argumentos borrosa

El modelo  $\mathcal{F}^A$  verifica la propiedad de inserción de argumentos borrosa (véase la definición 41).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}^{n+1}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso y  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Nótese que para  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  nítidos tenemos

$$\begin{aligned}
& Q \tilde{\triangleleft} A(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U}(\mathcal{F}^A(Q) \triangleleft A)(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U}\left(\left(\begin{array}{c} f : (K_1, \dots, K_{n+1}) \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \sum_{Z_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Z_n \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Z_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} \\ m_{K_1}(Z_1) \dots m_{K_n}(Z_n) m_{K_{n+1}}(Z_{n+1}) Q(Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}) \end{array}\right) \triangleleft A\right) \\
&(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U}\left(\left(\begin{array}{c} f' : (K'_1, \dots, K'_n) \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow f(K'_1, \dots, K'_n, A) \end{array}\right)\right)(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U}\left(\left(\begin{array}{c} f' : (K'_1, \dots, K'_n) \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \sum_{Z_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Z_n \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Z_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} \\ m_{K'_1}(Z_1) \dots m_{K'_n}(Z_n) m_A(Z_{n+1}) Q(Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}) \end{array}\right)\right) \\
&(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \left(\begin{array}{c} f'' : (K''_1, \dots, K''_n) \in \mathcal{P}(E) \rightarrow \sum_{Z_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Z_n \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Z_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} \\ m_{K''_1}(Z_1) \dots m_{K''_n}(Z_n) m_A(Z_{n+1}) Q(Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}) \end{array}\right) \\
&(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \left(\begin{array}{c} f'' : (K''_1, \dots, K''_n) \in \mathcal{P}(E) \rightarrow \sum_{Z_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_A(Z_{n+1}) Q(K''_1, \dots, K''_n, Z_{n+1}) \end{array}\right) \\
&(Y_1, \dots, Y_n)
\end{aligned}$$

por ser  $(K''_1, \dots, K''_n) \in \mathcal{P}(E)$  conjuntos nítidos, y así

$$\begin{aligned}
Q \tilde{\triangleleft} A(Y_1, \dots, Y_n) &= \dots & (A.21) \\
&= \sum_{Z_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_A(Z_{n+1}) Q(Y_1, \dots, Y_n, Z_{n+1})
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado que se acaba de obtener (expresión A.21):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(Q \tilde{\triangleleft} A)(X_1, \dots, X_n) && (A.22) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) (Q \tilde{\triangleleft} A)(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) \sum_{Z_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_A(Z_{n+1}) Q(Y_1, \dots, Y_n, Z_{n+1}) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_{n+1} \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) m_A(Y_{n+1}) Q(Y_1, \dots, Y_n, A) \\
&= \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n, A) \\
&= \mathcal{F}^A(Q) \triangleleft A
\end{aligned}$$

■

### Propiedad de continuidad en los argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^A$  verifica la propiedad de continuidad en los argumentos (véase la definición 43).

Para demostrar la propiedad de continuidad en los argumentos utilizaremos algunos resultados:

**Lema 8** Sea  $E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ , y  $X, X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  tales que  $d(X, X') < \delta$ . Entonces

$$|m_X(Y) - m_{X'}(Y)| < \delta m$$

para  $Y \in \mathcal{P}(E)$  nítido.

**Demostración.** Por inducción en el tamaño del referencial.

**Caso i = 1:** En el caso de que  $|E| = 1$  ( $E = E^1 = \{e_1\}$ ) tenemos

$$\begin{aligned}
|m_X(\emptyset) - m_{X'}(\emptyset)| &= |(1 - \mu_X(e_1)) - (1 - \mu_{X'}(e_1))| \\
&= |\mu_X(e_1) - \mu_{X'}(e_1)| < \delta \\
|m_X(\{e_1\}) - m_{X'}(\{e_1\})| &= |\mu_X(e_1) - \mu_{X'}(e_1)| < \delta
\end{aligned}$$

**Suposición de inducción, Caso  $i = m$**  ( $E = E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ )

$$|m_X(Y) - m_{X'}(Y)| < \delta m, Y \in \mathcal{P}(E)$$

**Caso**  $i = m + 1$  ( $E = E^{m+1} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ )

Sea  $Y \in \mathcal{P}(E^{m+1})$ . Supondremos que  $e_{m+1} \in Y$ . Entonces

$$|m_X(Y) - m_{X'}(Y)| = |\mu_X(e_{m+1}) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - \mu_{X'}(e_{m+1}) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| \quad (\text{A.23})$$

Supongamos que  $\mu_X(e_{m+1}) \geq \mu_{X'}(e_{m+1})$ . Entonces desarrollando la expresión A.23

$$\begin{aligned} \dots &= \left| \begin{array}{l} (\mu_X(e_{m+1}) - \mu_{X'}(e_{m+1}) + \mu_{X'}(e_{m+1})) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) \\ - \mu_{X'}(e_{m+1}) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) \end{array} \right| \\ &< |(\delta + \mu_{X'}(e_{m+1})) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - \mu_{X'}(e_{m+1}) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| \\ &= |\delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) + \mu_{X'}(e_{m+1}) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - \mu_{X'}(e_{m+1}) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| \\ &\leq |\delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| \\ &+ |\mu_{X'}(e_{m+1}) (m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}))| \\ &< |\delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| + |\mu_{X'}(e_{m+1}) \delta m| \\ &\leq |\delta| + |\delta m| \\ &= \delta(m+1) \end{aligned}$$

Supongamos que  $e_{m+1} \notin Y$ . Entonces

$$\begin{aligned} |m_X(Y) - m_{X'}(Y)| & \quad (\text{A.24}) \\ &= |(1 - \mu_X(e_{m+1})) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| \end{aligned}$$

Supongamos que  $(1 - \mu_X(e_{m+1})) \geq (1 - \mu_{X'}(e_{m+1}))$ . Entonces A.24 es igual a

$$\begin{aligned} \dots &= \left| \begin{array}{l} ((1 - \mu_X(e_{m+1})) - (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) + (1 - \mu_{X'}(e_{m+1}))) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) \\ - (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) \end{array} \right| \\ &< |(\delta + (1 - \mu_{X'}(e_{m+1}))) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| \\ &= \left| \begin{array}{l} \delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) \\ + (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) \end{array} \right| \\ &= |\delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) + (1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) (m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}))| \\ &\leq |\delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| + |(1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) (m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}) - m_{X'}^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\}))| \\ &< |\delta m_X^{E^m}(Y \setminus \{e_{m+1}\})| + |(1 - \mu_{X'}(e_{m+1})) \delta m| \\ &\leq |\delta| + |\delta m| \\ &= \delta(m+1) \end{aligned}$$

Con lo que el lema se cumple. ■

**Lema 9** Sean  $X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E^m)$  conjuntos borrosos sobre el referencial  $E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Supongamos que  $d((X_1, \dots, X_n), (X'_1, \dots, X'_n)) < \delta$ . Entonces

$$|m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) - m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_n}(Y_n)| < \delta mn$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E^m)$ .

**Demostración.** La prueba se realiza por inducción.

**Caso  $i = 2$ :**

Supongamos que  $m_{X_1}(Y_1) > m_{X'_1}(Y_1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} & |m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2)| \\ &= |(m_{X_1}(Y_1) - m_{X'_1}(Y_1) + m_{X'_1}(Y_1)) m_{X_2}(Y_2) - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2)| \end{aligned}$$

Y utilizando el lema 8

$$\begin{aligned} \dots &< |(\delta m + m_{X'_1}(Y_1)) m_{X_2}(Y_2) - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2)| \\ &= |\delta m \cdot m_{X_2}(Y_2) + m_{X'_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2)| \\ &= |\delta m \cdot m_{X_2}(Y_2) + m_{X'_1}(Y_1) (m_{X_2}(Y_2) - m_{X'_2}(Y_2))| \\ &\leq |\delta m \cdot m_{X_2}(Y_2)| + |m_{X'_1}(Y_1) (m_{X_2}(Y_2) - m_{X'_2}(Y_2))| \\ &\leq |\delta m| + |\delta m| \\ &= 2\delta m \end{aligned}$$

**Suposición de inducción.** Caso  $i = n$ :

$$|m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) - m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_n}(Y_n)| < \delta mn$$

**Caso  $i = n + 1$ .** Supongamos que  $m_{X_1}(Y_1) \geq m_{X'_1}(Y_1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} & |m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) - m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_{n+1}}(Y_{n+1})| \\ &= \left| \begin{aligned} & (m_{X_1}(Y_1) - m_{X'_1}(Y_1) + m_{X'_1}(Y_1)) m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) \\ & - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2) \dots m_{X'_{n+1}}(Y_{n+1}) \end{aligned} \right| \end{aligned}$$

Y utilizando el lema 8

$$\begin{aligned}
& \dots < \left| (\delta m + m_{X'_1}(Y_1)) m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2) \dots m_{X'_{n+1}}(Y_{n+1}) \right| \\
& = \left| \begin{aligned} & \delta m \cdot m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) + m_{X'_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) \\ & - m_{X'_1}(Y_1) m_{X'_2}(Y_2) \dots m_{X'_{n+1}}(Y_{n+1}) \end{aligned} \right| \\
& = \left| \begin{aligned} & \delta m \cdot m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) \\ & + m_{X'_1}(Y_1) \left( m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) - m_{X'_2}(Y_2) \dots m_{X'_{n+1}}(Y_{n+1}) \right) \end{aligned} \right| \\
& \leq \left| \delta m \cdot m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) \right| \\
& + \left| m_{X'_1}(Y_1) \left( m_{X_2}(Y_2) \dots m_{X_{n+1}}(Y_{n+1}) - m_{X'_2}(Y_2) \dots m_{X'_{n+1}}(Y_{n+1}) \right) \right| \\
& < |\delta m| + |\delta mn| \\
& = \delta m (n + 1)
\end{aligned}$$

Y el lema se cumple. ■

**Demostración.** Se procede ahora a demostrar la propiedad de continuidad en los argumentos.

$$\begin{aligned}
& d \left( \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n), \mathcal{F}^A(Q)(X'_1, \dots, X'_n) \right) \\
& = \left| \mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n) - \mathcal{F}^A(Q)(X'_1, \dots, X'_n) \right| \\
& = \left| \begin{aligned} & \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \\ & - \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned} \right| \\
& = \left| \begin{aligned} & \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \\ & (m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) - m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_n}(Y_n)) Q(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned} \right| \\
& \leq \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \\
& \quad \left| m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) - m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_n}(Y_n) \right| |Q(Y_1, \dots, Y_n)|
\end{aligned}$$

Y utilizando el lema 9

$$\begin{aligned}
& \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \left| m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) - m_{X'_1}(Y_1) \dots m_{X'_n}(Y_n) \right| |Q(Y_1, \dots, Y_n)| \\
& < \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \delta mn |Q(Y_1, \dots, Y_n)| \\
& \leq \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} \delta mn \cdot 1 \\
& = 2^{mn} \delta mn
\end{aligned}$$

Y la propiedad se cumple si

$$2^{mn}\delta mn < \varepsilon \iff \delta < \frac{\varepsilon}{2^{mn}mn}$$

Esta cota no es muy buena. Se puede probar que para  $\delta > 0$  se cumple que

$$d\left(\mathcal{F}^A(Q)(X_1, \dots, X_n), \mathcal{F}^A(Q')(X'_1, \dots, X'_n)\right) \leq 1 - \prod (1 - \delta)^{mn}$$

■

### Propiedad de continuidad en el cuantificador

El modelo  $\mathcal{F}^A$  verifica la propiedad de continuidad en el cuantificador (véase la definición 46).

**Demostración.** Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos, entonces

$$\begin{aligned} & d\left(\mathcal{F}^A(Q), \mathcal{F}^A(Q')\right) \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{\sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \cdots m_{X_n}(Y_n) Q(Y_1, \dots, Y_n)}{\sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \cdots m_{X_n}(Y_n) Q'(Y_1, \dots, Y_n)} \right| \right. \\ & \quad \left. : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{\sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \cdots m_{X_n}(Y_n)}{(Q(Y_1, \dots, Y_n) - Q'(Y_1, \dots, Y_n))} \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \cdots m_{X_n}(Y_n) d(Q, Q') \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| d(Q, Q') \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \cdots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \cdots m_{X_n}(Y_n) \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| d(Q, Q') \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &= d(Q, Q') \end{aligned}$$

Y la propiedad se cumple para  $\delta < \varepsilon$ . ■

### Propiedad de conservatividad

El modelo  $\mathcal{F}^A$  cumple la propiedad de conservatividad débil (véase la definición 51) pero no la conservatividad fuerte (véase la definición 50) como consecuencia de

que el modelo  $\mathcal{F}^A$  es un DFS.

### Propiedad de propagación de la borrosidad

El modelo  $\mathcal{F}^A$  no cumple la propiedad de propagación de la borrosidad (véase la definición 54).

**Demostración.** La tnorma inducida por el modelo  $\mathcal{F}^A$  es el producto, y esta tnorma no propaga la borrosidad. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(0,4,0,9) &= 0,36 \\ \tilde{\lambda}_*(0,5,0,5) &= 0,25\end{aligned}$$

$\tilde{\lambda}(0,5,0,5) = 0,25$  es más específico que  $\tilde{\lambda}(0,4,0,9) = 0,36$  aun cuando 0,5 es más borroso que 0,4 y 0,9. ■

### Propiedad del cuantificador identidad

El modelo  $\mathcal{F}^A$  verifica la propiedad del cuantificador identidad (véase la definición 55).

**Demostración.** Se denotará por

$$\Pr(card_X = j) = \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \mid |Y|=j} m_X(Y)$$

la probabilidad de que la cardinalidad de un representante de  $X$  sea  $j$ .

Nótese que para  $|E| = m$  se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^A(\text{identidad})(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \text{identidad}(Y) \\ &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) \frac{|Y|}{|E|} \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \mid |Y|=j} m_X(Y) \frac{j}{m} \\ &= \sum_{j=0}^m \Pr(card_X = j) \frac{j}{m}\end{aligned}$$

La prueba se realiza por inducción en el tamaño del referencial.

**Caso  $i = 1$ ,**  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E^1)$  la propiedad es evidente.

**Suposición de inducción.** Caso  $i = m$  (esto es,  $E = E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ ). Para  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  se cumple que

$$\mathcal{F}^A(\text{identidad})(X) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mu_X(e_j), X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$$

**Caso  $i = m + 1$**  (esto es,  $E = E^{m+1} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ ).

Nótese que para un referencial de  $m$  elementos se cumple que (se está utilizando la hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_X = j) \frac{j+1}{m+1} && \text{(A.25)} \\ &= \Pr(\text{card}_X = 0) \frac{1}{m+1} + \Pr(\text{card}_X = 1) \frac{2}{m+1} + \dots + \Pr(\text{card}_X = m) \frac{m+1}{m+1} \\ &= \Pr(\text{card}_X = 0) \frac{0}{m+1} + \Pr(\text{card}_X = 1) \frac{1}{m+1} + \dots + \Pr(\text{card}_X = m) \frac{m}{m+1} + \\ & \Pr(\text{card}_X = 0) \frac{1}{m+1} + \Pr(\text{card}_X = 1) \frac{1}{m+1} + \dots + \Pr(\text{card}_X = m) \frac{1}{m+1} \\ &= \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_X = j) \frac{j}{m+1} + \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_X = j) \\ &= \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_X = j) \frac{j}{m+1} + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{m}{m+1} \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_X = m) \frac{j}{m} + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{m}{m+1} \mathcal{F}^A(\text{identidad})(X) + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{m}{m+1} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) + \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

Supongamos ahora  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E^{m+1})$ . Y sea  $X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E^m)$  el conjunto borroso

$$X' = X^{E^m}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^A(\text{identidad})(X) \\
&= \sum_{j=0}^{m+1} \Pr(\text{card}_X = j) \frac{j}{m+1} \\
&= \Pr(\text{card}_{X'} = 0) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{0}{m+1} + \\
&+ \sum_{j=1}^m (\Pr(\text{card}_{X'} = j) (1 - \mu_X(e_{m+1})) + \Pr(\text{card}_{X'} = j-1) \mu_X(e_{m+1})) \frac{j}{m+1} \\
&+ \Pr(\text{card}_{X'} = m) \mu_X(e_{m+1}) \frac{m+1}{m+1} \\
&= \sum_{j=1}^m (\Pr(\text{card}_{X'} = j-1) \mu_X(e_{m+1})) \frac{j}{m+1} + \Pr(\text{card}_{X'} = m) \mu_X(e_{m+1}) \frac{m+1}{m+1} \\
&+ \sum_{j=1}^m \Pr(\text{card}_{X'} = j) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{j}{m+1} + \Pr(\text{card}_{X'} = 0) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{0}{m+1} \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} (\Pr(\text{card}_{X'} = j-1) \mu_X(e_{m+1})) \frac{j}{m+1} + \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_{X'} = j) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{j}{m+1} \\
&= \mu_X(e_{m+1}) \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_{X'} = j) \frac{j+1}{m+1} + (1 - \mu_X(e_{m+1})) \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_{X'} = j) \frac{j}{m+1} \\
&= \mu_X(e_{m+1}) \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_{X'} = j) \frac{j+1}{m+1} + (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{m}{m+1} \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_{X'} = j) \frac{j}{m}
\end{aligned}$$

Y utilizando la expresión A.25 y la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
&= \mu_X(e_{m+1}) \left( \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) + \frac{1}{m+1} \right) + (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{m}{m+1} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) \\
&= \mu_X(e_{m+1}) \left( \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) + \frac{1}{m+1} \right) + (1 - \mu_X(e_{m+1})) \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) \\
&= \mu_X(e_{m+1}) \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) + \mu_X(e_{m+1}) \frac{1}{m+1} \\
&+ \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) - \mu_X(e_{m+1}) \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_X(e_{m+1}) \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) \\
&= \frac{1}{m+1} \left( \sum_{j=0}^m \mu_X(e_j) + \mu_X(e_{m+1}) \right) \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} \mu_X(e_j)
\end{aligned}$$

■

### Propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^A$  verifica la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores (véase la definición 57).

**Demostración.** Sean  $Q_1, \dots, Q_r : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un conjunto de cuantificadores semi-borrosos que formen un recubrimiento probabilístico del universo de cuantificación. Entonces para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(Q_1)(X_1, \dots, X_n) + \dots + \mathcal{F}(Q_r)(X_1, \dots, X_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) Q_1(Y_1, \dots, Y_n) + \dots + \\
&+ \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) Q_r(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) (Q_1(Y_1, \dots, Y_n) + \dots + Q_r(Y_1, \dots, Y_n)) \\
&= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \dots \sum_{Y_n \in \mathcal{P}(E)} m_{X_1}(Y_1) \dots m_{X_n}(Y_n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por claridad, en la tabla A.1 resumimos el cumplimiento de propiedades por parte del modelo  $\mathcal{F}^A$ .

■

	$\mathcal{F}^A$
<b>Marco Axiomático de los DFSs</b>	
(Z-1) Generalización correcta	Sí
(Z-2) Cuantificadores de proyección	Sí
(Z-3) Dualidad	Sí
(Z-4) Uniones e intersecciones	Sí
(Z-5) Preservación de la monotonía	Sí
(Z-6) Aplicación funcional	Sí
<b>Propiedades adicionales</b>	
(PA-1) Inserción de argumentos borrosa	Sí
(PA-2) Continuidad en los argumentos	Sí
(PA-3) Continuidad en el cuantificador	Sí
(PA-4) Conservatividad	No
(PA-5) Propagación de la borrosidad	No
<b>Propiedades de los métodos probabilísticos</b>	
(PP-1) Media para el cuantificador identidad	Sí
(PP-2) Interpretación probabilística de los cuantificadores	Sí

**Tabla A.1:** Tabla de cumplimiento de las propiedades del modelo  $\mathcal{F}^A$ .

## A.2. Modelo $\mathcal{F}^{MD}$

Como ya hemos discutido en esta memoria, en el análisis de propiedades de este modelo nos restringiremos en ocasiones al caso finito.

### A.2.1. Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFS

#### Propiedad de generalización correcta

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de generalización correcta (véase la definición 7).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso  $n$ -ario. Para  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  conjuntos nítidos se cumple que  $(Y_i)_{\geq \alpha} = Y_i, \forall \alpha \in (0, 1]$ . Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(Q)(Y_1, \dots, Y_n) &= \int_0^1 Q((Y_1)_{\geq \alpha}, \dots, (Y_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q(Y_1, \dots, Y_n) d\alpha \\ &= Q(Y_1, \dots, Y_n) \int_0^1 d\alpha \\ &= Q(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

■

#### Propiedad de cuantitatividad

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de cuantitatividad (véase la definición 11).

**Lema 10** *Sea  $\beta : E \rightarrow E$  una biyección y  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso cualquiera. Se cumple que*

$$\left( \widehat{\beta}(X) \right)_{\geq \alpha} = \widehat{\beta}((X)_{\geq \alpha})$$

**Demostración.** Caso  $\left(\widehat{\beta}(X)\right)_{\geq\alpha} \subseteq \widehat{\beta}((X)_{\geq\alpha})$ : Si  $e \in \left(\widehat{\beta}(X)\right)_{\geq\alpha}$  entonces  $\mu_{\widehat{\beta}(X)}(e) \geq \alpha$  o lo que es lo mismo,

$$\mu_{\widehat{\beta}(X)}(e) = \sup \{ \mu_X(e') : e' \in E \wedge \beta(e') = e \} \geq \alpha$$

Pero por ser  $\beta$  una biyección sólo existe un  $e'$  tal que  $\beta(e') = e$ . Por lo tanto

$$\mu_X(e') \geq \alpha$$

con lo que  $e' \in (X)_{\geq\alpha}$  y  $e \in \widehat{\beta}((X)_{\geq\alpha})$ .

Caso  $\left(\widehat{\beta}(X)\right)_{\geq\alpha} \supseteq \widehat{\beta}((X)_{\geq\alpha})$ : Si  $e \in \widehat{\beta}((X)_{\geq\alpha})$  entonces  $e' = \beta^{-1}(e) \in (X)_{\geq\alpha}$ , o igualmente

$$\mu_X(e') \geq \alpha$$

Pero si  $\mu_X(e') \geq \alpha$  entonces

$$\mu_{\widehat{\beta}(X)}(e) = \sup \{ \mu_X(e'') : e'' \in E \wedge \beta(e'') = e \} \geq \alpha$$

Por lo tanto  $e \in \left(\widehat{\beta}(X)\right)_{\geq\alpha}$ . ■

Utilizando el lema 10 la demostración de la propiedad de cuantitatividad es inmediata:

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cuantitativo sobre un referencial  $E$  y  $\beta : E \rightarrow E$  una biyección cualquiera. Por ser  $Q$  cuantitativo se cumple que

$$Q(Y_1, \dots, Y_n) = Q\left(\widehat{\beta}(Y_1), \dots, \widehat{\beta}(Y_n)\right)$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{MD}(Q)\left(\widehat{\beta}(X_1), \dots, \widehat{\beta}(X_n)\right) \\ &= \int_0^1 Q\left(\left(\widehat{\beta}(X_1)\right)_{\geq\alpha}, \dots, \left(\widehat{\beta}(X_n)\right)_{\geq\alpha}\right) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q\left(\widehat{\beta}((X_1)_{\geq\alpha}), \dots, \widehat{\beta}((X_n)_{\geq\alpha})\right) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q\left((X_1)_{\geq\alpha}, \dots, (X_n)_{\geq\alpha}\right) d\alpha \\ &= \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

■

### Propiedad del valor de verdad inducido

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad del valor de verdad inducido (véase la definición 14).

**Demostración.** Sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(\pi_e)(X) &= \int_0^1 \pi_e((X)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^1 \begin{cases} 1 & : e \in (X)_{\geq \alpha} \\ 0 & : e \notin (X)_{\geq \alpha} \end{cases} d\alpha \\ &= \int_0^{\mu_X(e)} d\alpha \\ &= \mu_X(e) \end{aligned}$$

■

### Propiedad de las funciones de verdad inducidas

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de las funciones de verdad inducidas (véase la definición 17). En concreto, la función de negación inducida es la estándar, la tnorma inducida es el mínimo, la tconorma es el máximo, y la función de implicación es la de Lukasiewicz.

a) La función de verdad identidad inducida es  $\tilde{id}_{\mathbf{I}}$  independientemente del mecanismo utilizado para definir los operadores inducidos.

**Demostración.**  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(id_2) = \widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(id_2) = \tilde{id}_{\mathbf{I}}$ .

Mecanismo a)  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(id_2) = \widetilde{id}_I$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(id_2)(x) &= \mathcal{F}^{MD}(id_2^*)(\widetilde{\pi}_*^{-1}(x)) \\ &= \mathcal{F}^{MD}(id_2^*)(\{x/*\}) \\ &= \int_0^1 id_2^*(\{x/*\}_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^x d\alpha \\ &= x \\ &= \widetilde{id}_I(x)\end{aligned}$$

Mecanismo b)  $\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(id_2) = \widetilde{id}_I$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(id_2)(x) &= \mathcal{F}^{MD}(Q_{id_2})(\eta(x)) \\ &= \int_0^1 Q_{id_2}(\{x/1\}_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \widetilde{id}_I(x)\end{aligned}$$

■

b) La función de negación inducida es la negación estándar independientemente del mecanismo utilizado para definir los operadores inducidos.

**Demostración.**  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\neg) = \widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\neg) = \widetilde{\neg}$ .

Mecanismo a)  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\neg) = \widetilde{\neg}$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\neg)(x) &= \mathcal{F}^{MD}(\neg^*)(\widetilde{\pi}_*^{-1}(x)) \\ &= \mathcal{F}^{MD}(\neg^*)(\{x/*\}) \\ &= \int_0^1 \neg^*(\{x/*\}_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_{1-x}^1 d\alpha \\ &= 1 - x \\ &= \widetilde{\neg}(x)\end{aligned}$$

**Mecanismo b)**  $\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\neg) = \widetilde{\neg}$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\neg)(x) &= \mathcal{F}^{MD}(Q_{\neg})(\eta(x)) \\ &= \int_0^1 Q_{\neg}(\{x/1\}_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \widetilde{\neg}(x)\end{aligned}$$

■

c) La tnorma inducida es el mínimo independientemente del mecanismo utilizado para definir los operadores inducidos.

**Demostración.**  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\wedge)(x_1, x_2) = \widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\wedge)(x_1, x_2) = \widetilde{\wedge}(x_1, x_2) = \text{mín}(x_1, x_2)$ .

**Mecanismo a)**  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\wedge) = \text{mín}(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\wedge)(x_1, x_2) &= \mathcal{F}^{MD}(\wedge^*)(\widetilde{\pi}_*^{-1}(x_1), \widetilde{\pi}_*^{-1}(x_2)) \\ &= \int_0^1 \wedge^*(\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^{\text{mín}(x_1, x_2)} d\alpha \\ &= \text{mín}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

**Mecanismo b)**  $\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\wedge) = \text{mín}(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\wedge)(x_1, x_2) &= \mathcal{F}^{MD}(Q_{\wedge})\eta^{-1}(x_1, x_2) \\ &= \int_0^1 Q_{\wedge}(\{x_1/1, x_2/2\}_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^{\text{mín}(x_1, x_2)} d\alpha \\ &= \text{mín}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

■

d) La tconorma inducida es el máximo independientemente del mecanismo utilizado para definir los operadores inducidos.

**Demostración.** Idéntica a la prueba de la tnorma inducida. ■

e) La función de implicación inducida es la implicación de Lukasiewicz independientemente del mecanismo utilizado para definir los operadores inducidos.

**Demostración.**  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow)(x_1, x_2) = \widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow)(x_1, x_2) = \widetilde{\rightarrow}(x_1, x_2) = \min(1, 1 - x_1 + x_2)$ .

**Mecanismo a)**  $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow)(x_1, x_2) = \min(1, 1 - x_1 + x_2)$

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow)(x_1, x_2) &= \widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow^*)(x_1, x_2) \\ &= \int_0^1 \rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) d\alpha \end{aligned}$$

Supongamos que  $x_2 \geq x_1$  y consideremos los siguientes intervalos para  $\alpha$ :

$(x_2, 1]$ . En este intervalo  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) = 1$  ya que  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha} = \emptyset$ .

$(x_1, x_2]$ . En este intervalo  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) = 1$  ya que  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha} = \emptyset$  y  $\{x_2/*\}_{\geq \alpha} = \{*\}$ .

$(0, x_1]$ . En este intervalo  $(Q_{\rightarrow}) (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) = 1$  ya que  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha} = \{*\}$  y  $\{x_2/*\}_{\geq \alpha} = \{*\}$ .

Y así

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow)(x_1, x_2) &= 1 \\ &= \min(1, 1 - x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $x_2 < x_1$  y consideremos los siguientes intervalos para  $\alpha$ :

$(x_1, 1]$ . En este intervalo  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) = 1$  ya que  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha} = \emptyset$ .

$(x_2, x_1]$ . En este intervalo  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) = 0$  ya que  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha} = \{*\}$  y  $\{x_2/*\}_{\geq \alpha} = \emptyset$ .

$(0, x_2]$ . En este intervalo  $(Q_{\rightarrow}) (\{x_1/*\}_{\geq \alpha}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha}) = 1$  ya que  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha} = \{*\}$  y  $\{x_2/*\}_{\geq \alpha} = \{*\}$ .

Y así,

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}}(\rightarrow)(x_1, x_2) &= (1 - x_1) + x_2 \\ &= \min(1, 1 - x_1 + x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Mecanismo b) } \widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\rightarrow)(x_1, x_2) &= \text{mín}(1, 1 - x_1 + x_2) \\
\widetilde{\mathcal{F}^{MD}}(\rightarrow)(x_1, x_2) &= \mathcal{F}^{MD}(Q_{\rightarrow})\eta^{-1}(x_1, x_2) \\
&= \int_0^1 Q_{\rightarrow}(\{x_1/1, x_2/1\}_{\geq\alpha}) d\alpha \\
&= \dots \\
&= \text{mín}(1, 1 - x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

Procediendo de manera idéntica a la prueba realizada para el mecanismo a). ■

### Propiedad de trasposición de argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de trasposición de argumentos (véase la definición 21).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{MD}(Q_{\tau_i})(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) &= \int_0^1 (Q_{\tau_i})((X_1)_{\geq\alpha}, \dots, (X_i)_{\geq\alpha}, \dots, (X_n)_{\geq\alpha}) d\alpha \\
&= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq\alpha}, \dots, (X_n)_{\geq\alpha}, \dots, (X_i)_{\geq\alpha}) d\alpha \\
&= \mathcal{F}^{MD}(Q_{\tau_i})(X_1, \dots, X_n, \dots, X_i)
\end{aligned}$$

■

### Propiedad de negación externa

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de negación externa (véase la definición 23).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{MD}(\simeq Q)(X_1, \dots, X_n) &= \int_0^1 (\simeq Q)((X_1)_{\geq\alpha}, \dots, (X_n)_{\geq\alpha}) d\alpha \\
&= \int_0^1 1 - Q((X_1)_{\geq\alpha}, \dots, (X_n)_{\geq\alpha}) d\alpha \\
&= 1 - \int_0^1 Q((X_1)_{\geq\alpha}, \dots, (X_n)_{\geq\alpha}) d\alpha \\
&= \simeq \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

■

### Propiedad de negación interna

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  no verifica la propiedad de negación interna (véase la definición 25). Como caso particular la propiedad se verifica para cuantificadores unarios en el caso finito.

**Demostración.** El siguiente contraejemplo demuestra que la propiedad de negación interna no se cumple. Consideremos el siguiente cuantificador semi-borroso:

$$Q(Y_1, Y_2) = \begin{cases} \max \left\{ 2 \left( \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) - 1, 0 \right\} & : X_1 \neq \emptyset \\ 1 & : X_1 = \emptyset \end{cases}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} Q(\neg(Y_1, Y_2)) &= Q(Y_1, \neg Y_2) \\ &= \begin{cases} \max \left\{ 2 \left( \frac{|Y_1 \cap \neg Y_2|}{|Y_1|} \right) - 1, 0 \right\} & : Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & : Y_1 = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} \max \left\{ 2 \left( 1 - \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) - 1, 0 \right\} & : Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & : Y_1 = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} \max \left\{ 2 - 2 \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} - 1, 0 \right\} & : Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & : Y_1 = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} \max \left\{ 1 - 2 \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|}, 0 \right\} & : Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & : Y_1 = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

Y sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(\{e_1, \dots, e_4\})$  conjuntos borrosos definidos como

$$X_1 = \{0,6, 0,6, 0,6, 0,6\}$$

$$X_2 = \{0,9, 0,4, 0,4, 0,4\}$$

se obtiene

$$\tilde{\neg}X_2 = \{0,1, 0,6, 0,6, 0,6\}$$

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \tilde{\neg}X_2) = 0,75$$

$$\mathcal{F}^{MD}(Q(\neg))(X_1, X_2) = 0,5$$

■

Para la demostración de la propiedad en el caso unario se puede consultar la demostración de la misma para el modelo  $\mathcal{F}^I$ , ya que ambos modelos coinciden para cuantificadores unarios.

### Propiedad de dualidad

La propiedad de dualidad (véase la definición 27) es consecuencia de las propiedades de negación externa e interna y no es verificada por el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ , al violar éste la propiedad de negación interna.

### Propiedad de uniones e intersecciones

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de uniones e intersecciones (véase la definición 30).

**Demostración.** Se demuestra primero el caso de la intersección. Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera y nótese que en la definición de la intersección inducida se utiliza la tnorma mínimo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{MD}(Q \cap)(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \int_0^1 (Q \cap)((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}, (X_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
 &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha} \cap (X_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
 &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n \tilde{\cap} X_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
 &= \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n \tilde{\cap} X_{n+1}) \\
 &= \mathcal{F}^{MD}(Q) \tilde{\cap}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})
 \end{aligned}$$

El caso de la unión es completamente análogo. En este caso la unión inducida se

define mediante la tconorma máximo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{MD}(Q \cup)(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \int_0^1 (Q \cup)((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}, (X_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
&= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha} \cup (X_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
&= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n \tilde{\cup} X_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
&= \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n \tilde{\cup} X_{n+1}) \\
&= \mathcal{F}^{MD}(Q) \tilde{\cup}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})
\end{aligned}$$

■

### Propiedad de monotonía en los argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de monotonía en los argumentos (véase la definición 32).

**Demostración.** Se prueba la monotonía para cuantificadores semi-borrosos no decrecientes. El caso de cuantificadores borrosos no crecientes es análogo.

Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso monótono no decreciente en su argumento  $i$ ; esto es, un cuantificador semi-borroso cumpliendo

$$Q(Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n) \leq Q(Y_1, \dots, Y'_i, \dots, Y_n)$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n, Y'_i \in \mathcal{P}(E)$  nítidos tales que  $Y_i \subseteq Y'_i$ .

Supongamos ahora  $X_1, \dots, X_n, X'_i \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  borrosos cumpliendo que  $X_i \subseteq X'_i$  (en el sentido de la inclusión de Zadeh). Entonces

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \\
&= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_i)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\
&\leq \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X'_i)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\
&= \mathcal{F}^{MD}(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

puesto que  $X_i \subseteq X'_i \rightarrow (X_i)_{\geq \alpha} \subseteq (X'_i)_{\geq \alpha}$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ; y esto implica que

$$Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_i)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) \leq Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X'_i)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha})$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . ■

### Propiedad de monotonía en los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de monotonía en los cuantificadores (véase la definición 34).

**Demostración.** Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos cumpliendo que  $Q \leq Q'$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n) &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &\leq \int_0^1 Q'((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \mathcal{F}^{MD}(Q')(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

ya que  $Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) \leq Q'((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha})$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . ■

### Propiedad de coherencia con los cuantificadores estándar

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de coherencia con los cuantificadores estándar para los cuantificadores estándar unarios, pero para los cuantificadores estándar binarios la propiedad no se cumple (véase la definición 34).

**Demostración.** En el caso de cuantificadores unarios tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(\exists)(X) &= \int_0^1 (\exists)((X)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^{\sup\{\mu_X(e) : e \in E\}} d\alpha \\ &= \sup\{\mu_X(e) : e \in E\} \\ &= \sup\left\{\max_{i=1}^m \mu_X(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{MD}(\forall)(X) &= \int_0^1 (\forall)((X)_{\geq \alpha}) d\alpha \\
&= \int_0^{\inf\{\mu_X(e):e \in E\}} d\alpha \\
&= \inf\{\mu_X(e) : e \in E\} \\
&= \inf\left\{\min_{i=1}^m \mu_X(e) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\right\}
\end{aligned}$$

y el modelo de máxima dependencia cumple la propiedad para cuantificadores unarios.

Para cuantificadores binarios la propiedad no se cumple. Por ejemplo para,

$$X_1 = \{0,4, 0,6\}$$

$$X_2 = \{0,2, 0,4\}$$

obtenemos

$$\mathcal{F}^{MD}(\text{todos})(X_1, X_2) = \int_0^1 (\text{todos})((X_1)_{\geq \alpha}, (X_2)_{\geq \alpha}) d\alpha = 0,6$$

pero dado que

$$\begin{aligned}
X_1 \rightsquigarrow X_2 &= \{0,4, 0,6\} \rightsquigarrow \{0,2, 0,4\} \\
&= \{0,8, 0,8\}
\end{aligned}$$

se tiene

$$\inf\left\{\min_{i=1}^m \mu_{X_1}(a_i) \rightsquigarrow \mu_{X_2}(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\right\} = 0,8$$

■

### Propiedad de inserción de argumentos nítida

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de inserción de argumentos nítida (véase la definición 37).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera,

$A \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto nítido; entonces,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{MD}(Q \triangleleft A)(X_1, \dots, X_{n-1}) &= \int_0^1 (Q \triangleleft A)((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha}) d\alpha \\
 &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha}, A) d\alpha \\
 &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha}, A_{\geq \alpha}) d\alpha \\
 &= \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_{n-1}, A) \\
 &= \mathcal{F}^{MD}(Q) \triangleleft A(X_1, \dots, X_{n-1})
 \end{aligned}$$

■

### Propiedad de aplicación funcional

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de aplicación funcional en el caso finito (véase la definición 38).

### Principio de extensión inducido

**Proposición 7** Sea  $f : E \rightarrow E'$  (donde  $E, E' \neq \emptyset$ ). El principio de extensión inducido por el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  es

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}^{MD}(f)(X)}}(e') = \begin{cases} \sup \{u_X(e) : e \in \widehat{f^{-1}}(e')\} & : \widehat{f^{-1}}(e') \neq \emptyset \\ 0 & : \widehat{f^{-1}}(e') = \emptyset \end{cases}$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 \mu_{\widehat{\mathcal{F}^{MD}(f)(X)}}(e') &= \mathcal{F}^{MD}(\chi_{\widehat{f(\cdot)}}(e'))(X) \\
 &= \int_0^1 \chi_{\widehat{f(\cdot)}}(e')(X)_{\geq \alpha} d\alpha \\
 &= \int_0^1 \begin{cases} 1 & : e' \in \widehat{f}((X)_{\geq \alpha}) \\ 0 & : e' \notin \widehat{f}((X)_{\geq \alpha}) \end{cases} d\alpha \\
 &= \int_0^1 \begin{cases} 1 & : \widehat{f^{-1}}(e') \cap (X)_{\geq \alpha} \neq \emptyset \\ 0 & : \widehat{f^{-1}}(e') \cap (X)_{\geq \alpha} = \emptyset \end{cases} d\alpha
 \end{aligned}$$

Si la imagen inversa de  $e'$  es el vacío ( $\widehat{f^{-1}}(e') = \emptyset$ ) la expresión anterior vale 0.  $\widehat{f^{-1}}(e') \cap (X)_{\geq \alpha} \neq \emptyset$  siempre que exista algún elemento en  $(X)_{\geq \alpha}$  que esté en  $\widehat{f^{-1}}(e')$ , pero esto se cumple para todo  $\alpha < \sup \{u_X(e) : e \in \widehat{f^{-1}}(e')\}$ . Por lo tanto

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}^{MD}(f)(X)}}(e') = \begin{cases} \sup \{u_X(e) : e \in \widehat{f^{-1}}(e')\} & : \widehat{f^{-1}}(e') \neq \emptyset \\ 0 & : \widehat{f^{-1}}(e') = \emptyset \end{cases}$$

■

### Extensión de funciones sobre alfa-cortes

**Lema 11** Sea  $f : E' \rightarrow E$  una función con dominio  $E' \neq \emptyset$  finito,  $X' \in \widetilde{\mathcal{P}}(E')$  un conjunto borroso sobre  $E'$ . Se cumple que

$$\widehat{f}((X)_{\geq \alpha}) = \left( \widehat{f}(X) \right)_{\geq \alpha}$$

donde  $\widehat{f} : \widetilde{\mathcal{P}}(E') \rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}(E)$  se define utilizando el principio de extensión estándar.

**Demostración.** “ $\subseteq$ ” Sea  $e \in \widehat{f}((X)_{\geq \alpha})$ . Entonces  $e$  pertenece a la imagen por  $f$  de  $(X)_{\geq \alpha}$ , o lo que es lo mismo

$$\widehat{f^{-1}}(e) \cap (X)_{\geq \alpha} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists e' \in \widehat{f^{-1}}(e) \mu_X(e') \geq \alpha$$

pero como

$$\mu_{\widehat{f}(X)}(e) = \sup \{u_X(e') : e' \in \widehat{f^{-1}}(e)\}$$

entonces

$$\mu_{\widehat{f}(X)}(e) \geq \alpha \Rightarrow e \in \left( \widehat{f}(X) \right)_{\geq \alpha}$$

“ $\supseteq$ ” Sea  $e \in \left( \widehat{f}(X) \right)_{\geq \alpha}$ . Sabemos que

$$\mu_{\widehat{f}(X)}(e) = \sup \{u_X(e') : e' \in \widehat{f^{-1}}(e)\} \geq \alpha$$

Pero si  $E'$  es finito en particular el conjunto  $\{u_X(e') : e' \in \widehat{f^{-1}}(e)\}$  también es finito. Como sobre conjuntos finitos el supremo coincide con el máximo tenemos que

$$\max \{u_X(e') : e' \in \widehat{f^{-1}}(e)\} \geq \alpha$$

Pero si  $\max \{u_X(e') : e \in \widehat{f^{-1}}(e)\} \geq \alpha$  en particular existirá al menos un  $e' \in E'$  tal que  $u_X(e') \geq \alpha$ . Pero como  $e' \in (X)_{\geq \alpha}$  y  $f(e') = e$  se cumple que  $e \in \widehat{f}((X)_{\geq \alpha})$ .

■

Nótese que en el caso infinito sólo se cumple que

$$\widehat{f}((X)_{\geq \alpha}) \subseteq \left( \widehat{f}(X) \right)_{\geq \alpha}$$

Por ejemplo, para  $X \in \widetilde{\mathcal{P}}([0, 1])$  definido como

$$\mu_X(x) = \begin{cases} x & : x \in [0, 1) \\ 0 & : x = 1 \end{cases}$$

y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, 1) \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}((X)_{\geq 1}) &= \emptyset \\ \left( \widehat{f}(X) \right)_{\geq 1} &= \{1/0\}_{\geq 1} = \{0\} \end{aligned}$$

Se realiza ahora la prueba de la propiedad de aplicación funcional:

**Demostración.**

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{MD}(Q) \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_i)(X'_1, \dots, X'_n) \\ &= \mathcal{F}^{MD}(Q) \circ \left( \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_1)(X'_1), \dots, \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_n)(X'_n) \right) \\ &= \int_0^1 Q \left( \left( \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_1)(X'_1) \right)_{\geq \alpha}, \dots, \left( \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_n)(X'_n) \right)_{\geq \alpha} \right) d\alpha \end{aligned}$$

Y utilizando el lema 11:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^1 Q \left( \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_1)(X'_1)_{\geq \alpha}, \dots, \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_n)(X'_n)_{\geq \alpha} \right) d\alpha \\ &= \int_0^1 \left( Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_i) \right) \left( (X'_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X'_n)_{\geq \alpha} \right) d\alpha \\ &= \mathcal{F}^{MD} \left( Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}^{MD}}(f_i) \right) (X'_1, \dots, X'_n) \end{aligned}$$

■

## A.2.2. Propiedades no derivadas del marco axiomático de los DFS

### Propiedad de inserción de argumentos borrosa

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  no verifica la propiedad de inserción de argumentos borrosa (véase la definición 43).

**Demostración.** Comprobaremos el no cumplimiento de esta propiedad desarrollando las expresiones.

Sea  $Q : \mathcal{P}^{n+1}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso y  $A \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  un conjunto borroso. Nótese que para  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  nítidos tenemos

$$\begin{aligned}
 Q \tilde{\triangleleft} A(Y_1, \dots, Y_n) &= \mathcal{U}(\mathcal{F}^{MD}(Q) \triangleleft A)(Y_1, \dots, Y_n) \\
 &= \mathcal{U}\left(\left(\int_0^1 Q((K_1)_{\geq \alpha}, \dots, (K_n)_{\geq \alpha}, (K_{n+1})_{\geq \alpha}) d\alpha\right) \triangleleft A\right) \\
 &\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
 &= \mathcal{U}\left(\left(\int_0^1 Q\left(\left(\begin{array}{c} f' : (K'_1, \dots, K'_n) \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \rightarrow \\ (K'_1)_{\geq \alpha}, \dots, (K'_n)_{\geq \alpha}, (A)_{\geq \alpha} \end{array}\right)\right) d\alpha\right) (Y_1, \dots, Y_n) \right) \\
 &= \left(\int_0^1 Q\left(\left(\begin{array}{c} f'' : (K''_1, \dots, K''_n) \in \mathcal{P}(E) \rightarrow \\ (K''_1)_{\geq \alpha}, \dots, (K''_n)_{\geq \alpha}, (A)_{\geq \alpha} \end{array}\right)\right) d\alpha\right) (Y_1, \dots, Y_n) \\
 &= \left(\int_0^1 Q(K''_1, \dots, K''_n, (A)_{\geq \alpha}) d\alpha\right) (Y_1, \dots, Y_n)
 \end{aligned}$$

por ser  $(K''_1, \dots, K''_n) \in \mathcal{P}(E)$  conjuntos nítidos, y así

$$\begin{aligned}
 Q \tilde{\triangleleft} A(Y_1, \dots, Y_n) &= \dots \\
 &= \int_0^1 Q(Y_1, \dots, Y_n, (A)_{\geq \alpha}) d\alpha
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Aplicamos ahora el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  al cuantificador  $Q \lessdot A$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{MD}(Q \lessdot A)(X_1, \dots, X_n) &= \int_0^1 (Q \lessdot A)((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha & (A.27) \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}, (A)_{\geq \alpha_2}) d\alpha_2 d\alpha \\
 &\neq \\
 &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}, (A)_{\geq \alpha}) d\alpha \\
 &= \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n, A) \\
 &= \mathcal{F}^{MD}(Q) \triangleleft A
 \end{aligned}$$

■

### Propiedad de continuidad en los argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de continuidad en los argumentos en el caso finito (véase la definición 41).

Se demuestra para el caso unario. El razonamiento se generaliza de manera inmediata a cuantificadores no unarios.

**Demostración.** Sean  $X, X' \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  conjuntos borrosos,  $E$  finito. Y sea  $X'$  perteneciente a la bola centrada en  $X$  de radio  $\delta$ . Sabemos que  $|\mu_X(e) - \mu_{X'}(e)| < \delta$  para todo  $e \in E$ ; es decir,  $\mu_X(e) - \delta < \mu_{X'}(e) < \mu_X(e) + \delta$ . Sea  $\alpha \in [0, 1]$  un nivel de corte arbitrario,  $e \in E$  un elemento cualquiera; se cumple que

$$\begin{aligned}
 \alpha \leq \mu_X(e) - \delta &\Rightarrow e \in X_{>\alpha}, e \in X'_{\geq\alpha} \\
 \alpha \geq \mu_X(e) + \delta &\Rightarrow e \notin X_{\geq\alpha}, e \notin X'_{\geq\alpha}
 \end{aligned}$$

Nótese que

$$Q(X_{\geq\alpha}) = Q(X'_{\geq\alpha})$$

siempre que  $\alpha \notin (\mu_X(e) - \delta, \mu_X(e) + \delta)$  para algún  $e \in E$ . Por tanto, para  $\delta$  suficientemente pequeño (por ejemplo, consideremos  $\delta$  menor que

$$\frac{1}{2} \min \{|\mu_X(e_i) - \mu_{X'}(e_i)|, e_i \in E\}$$

será

$$|\mathcal{F}^{MD}(Q)(X) - \mathcal{F}^{MD}(Q)(X')| < 2\delta|E|$$

De aquí

$$2\delta |E| < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2|E|}$$

Así, para  $\delta < \frac{\varepsilon}{2|E|}$  tenemos que

$$|\mathcal{F}^{MD}(Q)(X) - \mathcal{F}^{MD}(Q)(X')| < 2\delta |E| = 2 \frac{\varepsilon}{2|E|} |E| = \varepsilon$$

■

Recuérdese que en el caso infinito la integral puede incluso no estar definida.

### Propiedad de continuidad en los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de continuidad en los cuantificadores (véase la definición 46).

**Demostración.** Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos. Entonces

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left| \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, \dots, X_n) - \mathcal{F}^{MD}(Q')(X_1, \dots, X_n) \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha - \int_0^1 Q'((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha - Q'((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \end{aligned}$$

Pero como para todo  $\alpha \in [0, 1]$  es

$$\left| Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) - Q'((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) \right| \leq d(Q, Q')$$

se cumple que

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left| \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha - \int_0^1 Q'((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ & \leq \sup \left\{ \left| \int_0^1 d(Q, Q') d\alpha \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ & = d(Q, Q') \end{aligned}$$

Por tanto, para  $\delta < d(Q, Q')$  es  $d(\mathcal{F}^{MD}(Q), \mathcal{F}^{MD}(Q')) \leq \delta$ ; es decir, la continuidad se cumple si elegimos  $\delta < \varepsilon$ . ■

### Propiedad de conservatividad

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de conservatividad fuerte (véase la definición 50).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso conservativo. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, X_2) &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, (X_2)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, (X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}) d\alpha\end{aligned}$$

por ser  $Q$  conservativo, y así

$$\begin{aligned}\dots &= \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha}, (X_1 \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, X_1 \tilde{\cap} X_2)\end{aligned}$$

■

### Propiedad de propagación de la borrosidad

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  no verifica la propiedad de propagación de la borrosidad (véase la definición 54).

**Demostración.** Considérese el siguiente contraejemplo:

$$\begin{aligned}X_1 &= \{1, 0, 5\} \\ X_2 &= \{1, 0\} \\ Q(Y) &= \frac{|Y|}{|E|}, Y \in \mathcal{P}(E) \\ \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1) &= 0,75 \\ \mathcal{F}^{MD}(Q)(X_2) &= 0,5\end{aligned}$$

■

### Propiedad del cuantificador identidad

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad del cuantificador identidad (véase la definición 55).

**Demostración.** Para la demostración de esta propiedad se utilizará la expresión OWA del modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  para cuantificadores cuantitativos unarios (véase la expresión 3.5).

Los pesos OWA asociados al cuantificador **identidad** son:

$$w_0 = Q(\emptyset) = 0$$

$$w_i = Q(\{e_1, \dots, e_i\}) - Q(\{e_1, \dots, e_{i-1}\}) = \frac{i}{m} - \frac{i-1}{m} = \frac{1}{m}$$

donde se ha supuesto que  $|E| = m$ . Desarrollando la expresión 3.5 para estos pesos obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{MD}(\text{identidad})(X) &= \sum_{i=0}^m w_i \cdot \alpha_i \\ &= w_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{i=1}^m w_i \cdot \alpha_i \\ &= 0 \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \cdot \alpha_i \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_X(e_i) \end{aligned}$$

■

### Propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  verifica la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores (véase la definición 57).

**Demostración.** Sean  $Q_1, \dots, Q_r : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un conjunto de cuantificadores semi-borrosos que formen un recubrimiento probabilístico del universo de cuantificación. Entonces para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{MD}(Q_1)(X_1, \dots, X_n) + \dots + \mathcal{F}^{MD}(Q_r)(X_1, \dots, X_n) \\ &= \int_0^1 Q_1((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha + \dots + \int_0^1 Q_r((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q_1((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha + \dots + \int_0^1 Q_r((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

al ser

$$Q_1((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) d\alpha + \dots + Q_r((X_1)_{\geq \alpha}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha}) = 1$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

En la tabla A.2 resumimos el cumplimiento de propiedades del modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ .

■

### A.3. Modelo $\mathcal{F}^I$

Nuevamente, como ya hemos comentado en el desarrollo de la memoria, en el análisis de propiedades de este modelo en ocasiones nos restringiremos al caso finito.

#### A.3.1. Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFS

##### Propiedad de generalización correcta

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de generalización correcta (véase la definición 7).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso  $n$ -ario. Para  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  conjuntos nítidos se cumple que  $(Y_i)_{\geq \alpha} = Y_i, \forall \alpha \in (0, 1]$ . Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(Y_1, \dots, Y_n) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((Y_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (Y_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q(Y_1, \dots, Y_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= Q(Y_1, \dots, Y_n) \int_0^1 \dots \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= Q(Y_1, \dots, Y_n) \end{aligned}$$

■

	$\mathcal{F}^{MD}$
<b>Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFSs</b>	
(PZ-1) Generalización correcta	Sí
(PZ-2) Cuantitatividad	Sí
(PZ-3) Valor de verdad inducido	Sí
(PZ-4) Funciones de verdad inducidas	Sí
(PZ-5) Trasposición de argumentos	Sí
(PZ-6) Negación externa	Sí
(PZ-7) Negación interna	No
(PZ-8) Dualidad	No
(PZ-9) Uniones e intersecciones	Sí
(PZ-10) Monotonía en los argumentos	Sí
(PZ-11) Monotonía en los cuantificadores	Sí
(PZ-12) Coherencia con los cuantificadores estándar	Caso unario
(PZ-13) Inserción de argumentos nítida	Sí
(PZ-14) Aplicación funcional	Caso finito
<b>Propiedades adicionales</b>	
(PA-1) Inserción de argumentos borrosa	No
(PA-2) Continuidad en los argumentos	Caso finito
(PA-3) Continuidad en el cuantificador	Sí
(PA-4) Conservatividad	Sí
(PA-5) Propagación de la borrosidad	No
<b>Propiedades de los métodos probabilísticos</b>	
(PP-1) Media para el cuantificador identidad	Sí
(PP-2) Interpretación probabilística de los cuantificadores	Sí

**Tabla A.2:** Tabla de cumplimiento de las propiedades para los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ .

### Propiedad de cuantitatividad

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de cuantitatividad (véase la definición 11).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cuantitativo sobre un referencial  $E$  y  $\beta : E \rightarrow E$  una biyección cualquiera. Por ser  $Q$  cuantitativo se cumple que

$$Q(Y_1, \dots, Y_n) = Q(\widehat{\beta}(Y_1), \dots, \widehat{\beta}(Y_n))$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^I(Q) \left( \widehat{\beta}(X_1), \dots, \widehat{\beta}(X_n) \right) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( \left( \widehat{\beta}(X_1) \right)_{\geq \alpha_1}, \dots, \left( \widehat{\beta}(X_n) \right)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

Y utilizando el lema 10 esto es igual a

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( \widehat{\beta}((X_1)_{\geq \alpha_1}), \dots, \widehat{\beta}((X_n)_{\geq \alpha_n}) \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

■

### Propiedad del valor de verdad inducido

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad del valor de verdad inducido (véase definición 14).

**Demostración.** Idéntica a la prueba del modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ . ■

### Propiedad de las funciones de verdad inducidas

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de las funciones de verdad inducidas (véase la definición 17), pero para este modelo los operadores inducidos dependen del mecanismo utilizado en su definición. En el caso de que se utilice el mecanismo b)

las funciones inducidas coinciden con las del modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  (al coincidir los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  para cuantificadores unarios). Pero cuando se utiliza el mecanismo a) la tnorma inducida es el producto, la tconorma es la suma probabilística, y la función de implicación es la de Rechenbach.

Procedemos pues al cálculo de las funciones de verdad inducidas con el mecanismo a), sólo se consideran los casos en los que las demostraciones difieren de las realizadas para el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ .

c) La tnorma inducida cuando se utiliza el mecanismo a) es el producto.

**Demostración.**  $\widetilde{\mathcal{F}}^I(\wedge)(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$ .

**Mecanismo a)**

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}^I(\wedge)(x_1, x_2) &= \mathcal{F}^I(\wedge^*)(\tilde{\pi}_*^{-1}(x_1), \tilde{\pi}_*^{-1}(x_2)) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \wedge^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha_1}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= x_1 \times x_2 \end{aligned}$$

■

d) La tconorma inducida cuando se utiliza el mecanismo a) es la suma probabilística.

**Demostración.** Idéntica a la prueba de la tnorma inducida. ■

e) La función de implicación inducida cuando se utiliza el mecanismo a) es la implicación de Rechenbach.

**Demostración.**  $\widetilde{\mathcal{F}}^I(\rightarrow)(x_1, x_2) = \rightarrow(x_1, x_2) = 1 - x_1 + x_1 x_2$ .

Desarrollando

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}^I(\rightarrow)(x_1, x_2) &= \mathcal{F}^I(\rightarrow^*)(\eta(x_1), \eta(x_2)) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha_1}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes intervalos para  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$(x_1, 1] \times (0, 1]$ . En este caso,  $\{x_1/*\}_{\geq \alpha_1} = \emptyset$  por lo que  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha_1}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha_2}) = 1$ .

$[0, x_1] \times (x_2, 1]$ . En este caso,  $\{x_1/*\}_{> \alpha_1} = \{*\}$  y  $\{x_2/*\}_{> \alpha_2} = \emptyset$  por lo que  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha_1}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha_2}) = 0$ .

$[0, x_1] \times [0, x_2]$ . En este caso,  $\{x_1/*\}_{> \alpha_1} = \{*\}$  y  $\{x_2/*\}_{> \alpha_2} = \{*\}$  por lo que  $\rightarrow^* (\{x_1/*\}_{\geq \alpha_1}, \{x_2/*\}_{\geq \alpha_2}) = 1$ .

Así,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}^I(\rightarrow)(x_1, x_2) &= \dots \\ &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{x_1}^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= 1 - x_1 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

■

### Propiedad de trasposición de argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de trasposición de argumentos (véase la definición 21).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^I(Q\tau_i)(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (Q\tau_i)((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_i)_{\geq \alpha_i}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_i}, \dots, (X_i)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n, \dots, X_i) \\ &= \mathcal{F}^I(Q)\tau_i(X_1, \dots, X_n, \dots, X_i) \end{aligned}$$

■

### Propiedad de negación externa

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de negación externa (véase la definición 23).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(\neg Q)(X_1, \dots, X_n) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (\neg Q)((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 1 - Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= 1 - \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \neg \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

■

### Propiedad de negación interna

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de negación interna en el caso finito.

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q\neg)(X_1, \dots, X_n) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (Q\neg)((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, \neg(X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (\neg X_n)_{> 1-\alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

Pero para un conjunto finito de alfa-cortes y los alfa-cortes estrictos coinciden excepto en un número finito de puntos. Como las diferencias en un número finito de puntos no afectan a la integral la expresión anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (\neg X_n)_{\geq 1-\alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (\neg X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, \neg X_n) \\ &= \mathcal{F}^I(Q) \neg(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

■

Para el siguiente cuantificador  $Q : \tilde{\mathcal{P}}([0, 1]) \rightarrow \mathbf{I}$  no se verifica la propiedad de negación interna:

$$Q(X) = \begin{cases} 0 & : \sup(X) \notin X \\ 1 & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

ya que para  $X \in \tilde{\mathcal{P}}([0, 1])$  definido como

$$\mu_X(x) = x, x \in \mathbf{I}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(\neg X) &= \int_0^1 Q((\neg X)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q([0, 1 - \alpha]) d\alpha \\ &= \int_0^1 d\alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q\neg)(X) &= \int_0^1 (Q\neg)((X)_{\geq \alpha}) d\alpha \\ &= \int_0^1 (Q\neg)([\alpha, 1]) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q(\neg[\alpha, 1]) d\alpha \\ &= \int_0^1 Q([0, \alpha]) d\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

con lo que  $\mathcal{F}^I(Q\neg) \neq \mathcal{F}^I(Q)\neg$ .

### Propiedad de dualidad

La propiedad de dualidad (véase la definición 27) es verificada por el modelo  $\mathcal{F}^I$  para referenciales finitos.

**Demostración.** Puesto que el modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica las propiedades de negación ex-

terna e interna en este caso:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^I(Q\Box) &= \mathcal{F}^I(\sim Q\neg) \\ &= \sim\mathcal{F}^I(Q)\sim \\ &= \mathcal{F}^I(Q)\tilde{\Box}\end{aligned}$$

■

### Propiedad de uniones e intersecciones

El modelo  $\mathcal{F}^I$  no verifica la propiedad de uniones e intersecciones (véase la definición 30).

**Demostración.** Para el caso de la intersección considérese el siguiente contraejemplo (se supone que se utiliza el mecanismo a) para la definición de los operadores inducidos):

$$\begin{aligned}\mathbf{algun}(Y_1, Y_2) &= \exists \cap (Y_1, Y_2) \\ &= \exists(Y_1 \cap Y_2) \\ &= \begin{cases} 1 & Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ X_1 &= \{0,6,0,9\} \\ X_2 &= \{0,7,0,3\} \\ X_1 \tilde{\cap} X_2 &= \{0,42,0,27\} \\ \mathcal{F}^I(\mathbf{algun})(X_1, X_2) &= \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{algun})((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_2)_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= 0,51 \\ \mathcal{F}^I(\exists) \tilde{\cap}(X_1, X_2) &= \int_0^1 (\exists)(X_1 \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha} d\alpha \\ &= 0,42\end{aligned}$$

En el caso de la unión también se encuentran contraejemplos del no cumplimiento de la propiedad. Además, también es posible encontrar contraejemplos del no cumplimiento de la propiedad cuando se utiliza el mecanismo b) para el cálculo de los operadores inducidos. ■

### Propiedad de monotonía en los argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de monotonía en los argumentos (véase la definición 32).

**Demostración.** Se prueba la monotonía para cuantificadores semi-borrosos no decrecientes. El caso de cuantificadores borrosos no crecientes es análogo.

Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso monótono no decreciente en su argumento  $i$ ; esto es, un cuantificador semi-borroso cumpliendo

$$Q(Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n) \leq Q(Y_1, \dots, Y'_i, \dots, Y_n)$$

para todo  $Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_n, Y'_i \in \mathcal{P}(E)$  nítidos tales que  $Y_i \subseteq Y'_i$ .

Supongamos ahora  $X_1, \dots, X_n, X'_i \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  borrosos cumpliendo que  $X_i \subseteq X'_i$  (en el sentido de la inclusión de Zadeh). Entonces,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_i)_{\geq \alpha_i}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &\leq \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X'_i)_{\geq \alpha_i}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I(X_1, \dots, X'_i, \dots, X_n) \end{aligned}$$

puesto que  $X_i \subseteq X'_i \rightarrow (X_i)_{> \alpha_i} \subseteq (X'_i)_{> \alpha_i}$  para todo  $\alpha_i \in [0, 1]$ ; y esto implica que

$$Q((X_1)_{> \alpha_1}, \dots, (X_i)_{> \alpha_i}, \dots, (X_n)_{> \alpha_n}) \leq Q((X_1)_{> \alpha_1}, \dots, (X'_i)_{> \alpha_i}, \dots, (X_n)_{> \alpha_n})$$

para todo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, 1]^n$ . ■

### Propiedad de monotonía en los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de monotonía en los cuantificadores (véase la definición 34).

**Demostración.** Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos cumpliendo

que  $Q \leq Q'$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &\leq \int_0^1 \dots \int_0^1 Q'((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I(Q')(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

ya que  $Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) \leq Q'((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n})$  para todo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, 1]^n$ . ■

### Propiedad de coherencia con los cuantificadores estándar

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de coherencia con los cuantificadores estándar (véase la definición 34) para los cuantificadores estándar unarios cuando los operadores inducidos se calculan con el mecanismo b) (véase la definición 17). Para cuantificadores estándar binarios la propiedad no se cumple. En el caso de que los operadores inducidos se calculen con el mecanismo a) la propiedad no se cumple en ningún caso.

**Demostración.** El modelo  $\mathcal{F}^I$  coincide con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  para el caso de cuantificadores unarios por lo que remitimos al lector a la prueba realizada para el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  en esta situación.

En las otras situaciones es fácil encontrar contraejemplos. Por ejemplo, para los conjuntos borrosos

$$\begin{aligned} X_1 &= \{0,4, 0,6\} \\ X_2 &= \{0,2, 0,4\} \end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathcal{F}^I(\text{todos})(X_1, X_2) = \int_0^1 \int_0^1 (\text{todos})((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_2)_{\geq \alpha_2}) d\alpha = 0,56$$

Pero para los operadores inducidos por el mecanismo b) tenemos

$$\begin{aligned} X_1 \widetilde{\rightarrow} X_2 &= \{0,4, 0,6\} \widetilde{\rightarrow} \{0,2, 0,4\} \\ &= \{0,8, 0,8\} \end{aligned}$$

pero

$$\inf \left\{ \min_{i=1}^m \mu_{X_1}(a_i) \widetilde{\rightarrow} \mu_{X_2}(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\} = 0,8$$

Si utilizamos los operadores inducidos por el mecanismo a) tenemos

$$\begin{aligned} X_1 \widetilde{\rightarrow} X_2 &= \{0,4,0,6\} \widetilde{\rightarrow} \{0,2,0,4\} \\ &= \{0,68,0,64\} \end{aligned}$$

pero

$$\inf \left\{ \prod_{i=1}^m \mu_{X_1}(a_i) \widetilde{\rightarrow} \mu_{X_2}(a_i) : A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{P}(E), a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \right\} = 0,44$$

■

### Propiedad de inserción de argumentos nítida

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de inserción de argumentos nítida (véase la definición 37).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso cualquiera,  $A \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto nítido; entonces,

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^I(Q \triangleleft A)(X_1, \dots, X_{n-1}) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (Q \triangleleft A) \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha_{n-1}} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha_{n-1}}, A \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha_{n-1}}, A \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} \int_0^1 d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha_{n-1}}, A \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha_{n-1}}, (A)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_{n-1})_{\geq \alpha_{n-1}}, (A)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_{n-1}, A) \\ &= \mathcal{F}^I(Q) \triangleleft A(X_1, \dots, X_{n-1}) \end{aligned}$$

■

### Propiedad de aplicación funcional

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de aplicación funcional en el caso finito (véase la definición 38).

**Demostración.** Nótese que el principio de extensión inducido por el modelo  $\mathcal{F}^I$  es el mismo que el principio de extensión inducido por el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ .

Desarrollando

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^I(Q) \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}^I(f_i)(X'_1, \dots, X'_n) \\ &= \mathcal{F}^I(Q) \circ \left( \widehat{\mathcal{F}}^I(f_1)(X'_1), \dots, \widehat{\mathcal{F}}^I(f_n)(X'_n) \right) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( \left( \widehat{\mathcal{F}}^I(f_1)(X'_1) \right)_{\geq \alpha_1}, \dots, \left( \widehat{\mathcal{F}}^I(f_n)(X'_n) \right)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned}$$

Y utilizando el lema 11 esto es equivalente a:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( \widehat{\mathcal{F}}^I(f_1)(X'_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}^{MD}(f_n)(X'_n)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}(f_i) \right) \left( (X'_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X'_n)_{\geq \alpha_n} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &= \mathcal{F}^I \left( Q \circ \times_{i=1}^n \widehat{\mathcal{F}}(f_i) \right) (X'_1, \dots, X'_n) \end{aligned}$$

■

### A.3.2. Propiedades no derivadas del marco axiomático de los DFS

#### Propiedad de inserción de argumentos borrosa

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de inserción de argumentos borrosa (véase la definición 41).

**Demostración.** Sea  $Q : \mathcal{P}^{n+1}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso y  $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$

un conjunto borroso. Nótese que para  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{P}(E)$  nítidos tenemos

$$\begin{aligned}
& Q \tilde{\triangleleft} A(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U}(\mathcal{F}^I(Q) \triangleleft A)(Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U} \left( \left( \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (K_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (K_n)_{\geq \alpha_n}, (K_{n+1})_{\geq \alpha_{n+1}} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+1} \right) \triangleleft A \right) \\
&\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \mathcal{U} \left( \left( \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (K'_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (K'_n)_{\geq \alpha_n}, (A)_{\geq \alpha_{n+1}} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+1} \right) \right) \\
&\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \left( \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( (K''_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (K''_n)_{\geq \alpha_n}, (A)_{\geq \alpha_{n+1}} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+1} \right) \\
&\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \left( \int_0^1 \dots \int_0^1 Q \left( K_1, \dots, K_n, (A)_{\geq \alpha_{n+1}} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+1} \right) \\
&\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \left( \int_0^1 Q \left( K_1, \dots, K_n, (A)_{\geq \alpha_{n+1}} \right) d\alpha_{n+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right) \\
&\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \left( f'' : (K''_1, \dots, K''_n) \in \mathcal{P}(E) \rightarrow \int_0^1 Q \left( K_1, \dots, K_n, (A)_{\geq \alpha_{n+1}} \right) d\alpha_{n+1} \right) \\
&\quad (Y_1, \dots, Y_n) \\
&= \int_0^1 Q(Y_1, \dots, Y_n, (A)_{\geq \alpha}) d\alpha
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora el QFM  $\mathcal{F}^I$  al cuantificador  $Q \tilde{\triangleleft} A$ :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^I (Q \tilde{\triangleleft} A) (X_1, \dots, X_n) \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 (Q \tilde{\triangleleft} A) ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_0^1 Q ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}, (A)_{\geq \alpha}) d\alpha d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}, (A)_{\geq \alpha_{n+1}}) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n+1} \\
&= \mathcal{F}^I (Q) (X_1, \dots, X_n, A) \\
&= \mathcal{F}^I (Q) \triangleleft A
\end{aligned}$$

■

### Propiedad de continuidad en los argumentos

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de continuidad en los argumentos en el caso finito (véase la definición 41).

**Demostración.** En el caso unario el modelo  $\mathcal{F}^I$  coincide con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  por lo que la propiedad se cumple. En la demostración de la continuidad para cuantificadores de mayor aridad se utilizan exactamente las mismas ideas que en la demostración planteada para el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ , por lo que no se planteará. ■

### Propiedad de continuidad en los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de continuidad en los cuantificadores (véase la definición 46).

**Demostración.** Sean  $Q, Q' : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow \mathbf{I}$  cuantificadores semi-borrosos. Entonces

$$\begin{aligned}
& \sup \left\{ \left| \mathcal{F}^I (Q) (X_1, \dots, X_n) - \mathcal{F}^I (Q') (X_1, \dots, X_n) \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 Q ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^1 \dots \int_0^1 Q' ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 Q ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - Q' ((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\}
\end{aligned}$$

Pero como para todo  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]^n$  se cumple que

$$|Q((X_1)_{>\alpha_1}, \dots, (X_n)_{>\alpha_n}) - Q'((X_1)_{>\alpha_1}, \dots, (X_n)_{>\alpha_n})| \leq d(Q, Q')$$

entonces

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) - Q'((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ & \leq \sup \left\{ \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 d(Q, Q') d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right| : X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E) \right\} \\ & = d(Q, Q') \end{aligned}$$

Por tanto, para  $\delta < d(Q, Q')$  es  $d(\mathcal{F}^I(Q), \mathcal{F}^I(Q')) \leq \delta$ ; es decir, la continuidad se cumple si elegimos  $\delta < \varepsilon$ . ■

### Propiedad de conservatividad

El QFM  $\mathcal{F}^I$  no verifica la propiedad de conservatividad fuerte pero si la de conservatividad débil (véanse las definiciones 50 y 51).

**Demostración.** Se procede a la demostración de la propiedad de conservatividad débil:

Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso conservativo. Al ser  $Q$  conservativo para todo  $(\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 1]^2$  y  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  se cumple que

$$\begin{aligned} Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_2)_{\geq \alpha_2}) &= Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_1)_{\geq \alpha_1} \cap (X_2)_{\geq \alpha_2}) \\ &= Q((X_1)_{>\alpha_1}, (X_1)_{>\alpha_1} \cap \text{sup}(X_1) \cap (X_2)_{>\alpha_2}) \\ &= Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_1)_{\geq \alpha_1} \cap (\text{sup}(X_1))_{\geq \alpha_2} \cap (X_2)_{\geq \alpha_2}) \\ &= Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_1)_{\geq \alpha_1} \cap (\text{sup}(X_1) \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha_2}) \end{aligned}$$

Utilizando este resultado la prueba de la propiedad es inmediata:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2) &= \int_0^1 \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_2)_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (X_1)_{\geq \alpha_1} \cap (\text{sup}(X_1) \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, (\text{sup}(X_1) \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned}$$

Puesto que al ser  $Q$  conservativo se cumple que

$$Q\left((X_1)_{\geq\alpha_1}, (X_1)_{\geq\alpha_1} \cap (\text{sup}(X_1) \tilde{\cap} X_2)_{\geq\alpha_2}\right) = Q\left((X_1)_{\geq\alpha_1}, (\text{sup}(X_1) \tilde{\cap} X_2)_{\geq\alpha_2}\right)$$

y así

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2) &= \dots \\ &= \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \text{sup}(X_1) \tilde{\cap} X_2)\end{aligned}$$

El siguiente contraejemplo demuestra el no cumplimiento de la propiedad de conservatividad fuerte para la intersección inducida asociada al mecanismo a) (que utiliza la tnorma producto):

$$\begin{aligned}X_1 &= \{1, 0, 8\} \\ X_2 &= \{0, 6, 0, 8\} \\ X_1 \tilde{\cap} X_2 &= \{0, 6, 0, 64\} \\ Q(Y_1, Y_2) &= \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|E|}, Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E) \\ \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2) &= 0,68 \\ \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_1 \tilde{\cap} X_2) &= 0,63\end{aligned}$$

Y el siguiente contraejemplo demuestra el no cumplimiento de la propiedad de conservatividad fuerte para la intersección inducida asociada al mecanismo b) (que utiliza la tnorma mínimo):

$$\begin{aligned}X_1 &= \{1, 0, 6\} \\ X_2 &= \{0, 8, 0, 8\} \\ X_1 \tilde{\cap} X_2 &= \{0, 8, 0, 6\} \\ Q(Y_1, Y_2) &= \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|E|}, Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E) \\ \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2) &= 0,64 \\ \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_1 \tilde{\cap} X_2) &= 0,66\end{aligned}$$

■

### Propiedad de propagación de la borrosidad

El modelo  $\mathcal{F}^I$  no verifica la propiedad de propagación de la borrosidad (véase la definición 54).

**Demostración.** El contraejemplo mostrado para el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  es válido en este caso. ■

### Propiedad del cuantificador identidad

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad del cuantificador identidad (véase la definición 55).

**Demostración.** Por coincidir los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$  para cuantificadores unarios y cumplirse la propiedad para el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ . ■

### Propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores

El modelo  $\mathcal{F}^I$  verifica la propiedad de interpretación probabilística de los cuantificadores (véase la definición 57).

**Demostración.** Sean  $Q_1, \dots, Q_r : \mathcal{P}^n(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un conjunto de cuantificadores semi-borrosos que formen un recubrimiento probabilístico del universo de cuantificación. Entonces para todo  $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}^I(Q_1)(X_1, \dots, X_n) + \dots + \mathcal{F}^I(Q_r)(X_1, \dots, X_n) \\
 &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q_1((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n + \dots + \\
 &+ \int_0^1 \dots \int_0^1 Q_r((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\
 &= \int_0^1 \dots \int_0^1 Q_1((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) + \dots + \\
 &+ Q_r((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

al ser

$$Q_1((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) + \dots + Q_r((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) = 1$$

para todo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0, 1]^n$ .

En la tabla A.3 resumimos el cumplimiento de propiedades por parte del modelo  $\mathcal{F}^I$ .

■

	$\mathcal{F}^I$
<b>Propiedades derivadas del marco axiomático de los DFSs</b>	
(PZ-1) Generalización correcta	Sí
(PZ-2) Cuantitatividad	Sí
(PZ-3) Valor de verdad inducido	Sí
(PZ-4) Funciones de verdad inducidas	Sí
(PZ-5) Trasposición de argumentos	Sí
(PZ-6) Negación externa	Sí
(PZ-7) Negación interna	Caso finito
(PZ-8) Dualidad	Caso finito
(PZ-9) Uniones e intersecciones	No
(PZ-10) Monotonía en los argumentos	Sí
(PZ-11) Monotonía en los cuantificadores	Sí
(PZ-12) Coherencia con los cuantificadores estándar	No
(PZ-13) Inserción de argumentos nítida	Sí
(PZ-14) Aplicación funcional	Caso finito
<b>Propiedades adicionales</b>	
(PA-1) Inserción de argumentos borrosa	Sí
(PA-2) Continuidad en los argumentos	Caso finito
(PA-3) Continuidad en el cuantificador	Sí
(PA-4) Conservatividad	No
(PA-5) Propagación de la borrosidad	No
<b>Propiedades de los métodos probabilísticos</b>	
(PP-1) Media para el cuantificador identidad	Sí
(PP-2) Interpretación probabilística de los cuantificadores	Sí

**Tabla A.3:** Tabla de cumplimiento de las propiedades para los modelos  $\mathcal{F}^{MD}$  y  $\mathcal{F}^I$ .

# Apéndice B

## Algoritmos

### B.1. Algoritmos para el modelo $\mathcal{F}^A$

En este apartado presentamos los algoritmos que permiten evaluar algunos de los cuantificadores borrosos más interesantes cuando se utiliza el modelo  $\mathcal{F}^A$ . Plantearemos las expresiones que permiten evaluar los cuantificadores estándar y los algoritmos para evaluar cuantificadores unarios cuantitativos y cuantificadores binarios cuantitativos conservativos. Particularmente, resulta muy interesante la explicación de los algoritmos para evaluar cuantificadores binarios conservativos, ya que la generalización del razonamiento utilizado a otros tipos de cuantificadores es inmediata.

#### B.1.1. Cuantificadores estándar

En esta sección damos las expresiones que nos permiten evaluar los cuantificadores estándar.

**Teorema 51** Sea  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  un referencial finito. Se cumple que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^A(\exists)(X) &= \widetilde{\bigvee}_{i=1}^m \mu_X(e_i) \\ \mathcal{F}^A(\forall)(X) &= \prod_{i=1}^m \mu_X(e_i) \\ \mathcal{F}^A(\text{algun})(X_1, X_2) &= \widetilde{\bigvee}_{i=1}^m \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i) \\ \mathcal{F}^A(\text{todos})(X_1, X_2) &= \prod_{i=1}^m \mu_{X_1}(e_i) \widetilde{\rightarrow} \mu_{X_2}(e_i) \\ &= \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i) + \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i)) \\ \mathcal{F}^A(\text{ningun})(X_1, X_2) &= \widetilde{\neg} \widetilde{\bigvee}_{i=1}^m \mu_{X_1}(e_i) \mu_{X_2}(e_i) \\ &= \prod_{i=1}^m (1 - \mu_{X_1}(e_i) + \mu_{X_1}(e_i) (1 - \mu_{X_2}(e_i)))\end{aligned}$$

para todo  $X, X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$ .

**Demostración.** Los cuatro primeros casos son consecuencia del cumplimiento de la propiedad de coherencia con la lógica (al ser el modelo  $\mathcal{F}^A$  un DFS). El último caso se obtiene fácilmente utilizando que  $\text{ningun} = \widetilde{\neg} \exists = \forall \neg$ . ■

### B.1.2. Cuantificadores cuantitativos unarios

Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario cuantitativo sobre un referencial  $E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Por el teorema 42 sabemos que existe una función  $q : \{0, \dots, m\} \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$q(j) = Q(Y_j)$$

para todo  $j \in \{0, \dots, m\}$ , e  $Y_j \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto nítido arbitrario de cardinalidad  $j$  ( $|Y_j| = j$ ).

Sea  $X \in \mathcal{P}(E)$  un conjunto borroso. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^A(Q)(X) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} m_X(Y) Q(Y) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \parallel |Y|=0} m_X(Y) Q(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \parallel |Y|=1} m_X(Y) Q(Y) + \\
&+ \dots + \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \parallel |Y|=m} m_X(Y) Q(Y) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \parallel |Y|=0} m_X(Y) q(0) + \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \parallel |Y|=1} m_X(Y) q(1) + \\
&+ \dots + \sum_{Y \in \mathcal{P}(E) \parallel |Y|=m} m_X(Y) q(m) \\
&= \sum_{j=0}^m \Pr(\text{card}_X = j) q(j)
\end{aligned}$$

El algoritmo que se va a plantear aprovecha el hecho de que se puede calcular la probabilidad  $\Pr_{E^m}(\text{card}_X = j)$ ,  $j = 0, \dots, m$  para un referencial  $E^m$  de  $m$  elementos a partir de las probabilidades  $\Pr_{E^{m-1}}(\text{card}_{X^{E^{m-1}}} = j)$ ,  $j = 0, \dots, m-1$  donde  $E^{m-1} = \{e_1, \dots, e_{m-1}\}$  y  $X^{E^{m-1}}$  es la proyección de  $X$  sobre  $E^{m-1}$ . Esto nos va a permitir plantear una expresión recursiva para el cálculo de las probabilidades de las cardinalidades en el caso general.

En el caso de un referencial de un elemento ( $E^1 = \{e_1\}$ ) es fácil calcular las probabilidades de las cardinalidades asociadas a un conjunto borroso  $X \in \mathcal{P}(E^1)$ :

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{card}_X = 0) &= m_X(\emptyset) = 1 - \mu_X(e_1) \\
\Pr(\text{card}_X = 1) &= m_X(\{e_1\}) = \mu_X(e_1)
\end{aligned}$$

Supongamos ahora un referencial de  $m+1$  elementos ( $E^{m+1} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ ), sea  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E^{m+1})$  un conjunto borroso en  $E^{m+1}$ ,  $E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$  y  $X^{E^m} \in \tilde{\mathcal{P}}(E^m)$  la proyección de  $X$  en  $E^m$ ; esto es,

$$\mu_{X^{E^m}}(e_j) = \mu_X(e_j), 1 \leq j \leq m$$

Supongamos que conocemos las probabilidades asociadas a las cardinalidades de  $X^{E^m}$  sobre  $E^m$ :

$$\Pr(\text{card}_{X^{E^m}} = 0), \dots, \Pr(\text{card}_{X^{E^m}} = m)$$

Vamos a calcular las probabilidades de las cardinalidades asociadas a  $X$  a partir de las probabilidades de las cardinalidades asociadas a  $X^{E^m}$ . Consideraremos tres casos particulares:

**Caso 1:**  $\Pr(\text{card}_X = 0)$

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{card}_X = 0) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^{m+1}) \mid |Y|=0} m_X(Y) \\
&= m_X(\emptyset) \\
&= (1 - \mu_X(e_1)) \dots (1 - \mu_X(e_m)) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \\
&= (1 - \mu_{X^{E^m}}(e_1)) \dots (1 - \mu_{X^{E^m}}(e_m)) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \\
&= m_{X^{E^m}}(\emptyset) (1 - \mu_X(e_{m+1})) \\
&= \Pr(\text{card}_{X^{E^m}} = 0) (1 - \mu_X(e_{m+1}))
\end{aligned}$$

**Caso 2:**  $\Pr(\text{card}_X = m + 1)$

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{card}_X = m + 1) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^{m+1}) \mid |Y|=m+1} m_X(Y) \\
&= m_X(E^{m+1}) \\
&= \mu_X(e_1) \dots \mu_X(e_m) \mu_X(e_{m+1}) \\
&= \mu_{X^{E^m}}(e_1) \dots \mu_{X^{E^m}}(e_m) \mu_X(e_{m+1}) \\
&= m_{X^{E^m}}(E^m) \mu_X(e_{m+1}) \\
&= \Pr(\text{card}_{X^{E^m}} = m) \mu_X(e_{m+1})
\end{aligned}$$

**Caso 3:**  $\Pr(\text{card}_X = j), 0 < j < m + 1$

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{card}_X = j) &= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^{m+1}) \mid |Y|=j} m_X(Y) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^{m+1}) \mid |Y|=j \wedge e_{m+1} \notin Y} m_X(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^{m+1}) \mid |Y|=j \wedge e_{m+1} \in Y} m_X(Y) \\
&= \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m) \mid |Y|=j} m_{X^{E^m}}(Y) (1 - \mu_X(e_{m+1})) + \\
&+ \sum_{Y \in \mathcal{P}(E^m) \mid |Y|=j-1} m_X(Y) \mu_X(e_{m+1}) \\
&= \Pr(\text{card}_{X^{E^m}} = j) (1 - \mu_X(e_{m+1})) + \Pr(\text{card}_{X^{E^m}} = j - 1) \mu_X(e_{m+1})
\end{aligned}$$

Los casos anteriores se resumen en la expresión B.1. En la tabla B.1 se presenta el algoritmo para aplicar el modelo  $\mathcal{F}^A$  a cuantificadores semi-borrosos unarios

Algoritmo para calcular $\mathcal{F}^A(Q)(X)$
Complejidad $O(n^2)$
<pre> INPUT: X[0,...,m-1], m ≥ 1, q: {0, ..., m} → I double pr_aux_i, pr_aux_i_minus_1; double pr[0, ..., m]; result = 0; pr[0] = 1; for (j = 0; j &lt; m; j++) {     pr_aux_i = pr[0];     pr[0] = (1 - X[j]) × pr_aux_i;     pr_aux_i_minus_1 = pr_aux_i;     for (i = 1; i ≤ j; i++) {         pr_aux_i = pr[i];         pr[i] = (1 - X[j]) × pr_aux_i + X[j] × pr_aux_i_minus_1;         pr_aux_i_minus_1 = pr_aux_i;     }     pr[j+1] = X[j] × pr_aux_i_minus_1; } for (j = 0; j ≤ m; j++)     result = result + pr[j] × q(j); return result; </pre>

**Tabla B.1:** Algoritmo para evaluar cuantificadores cuantitativos unarios con el modelo  $\mathcal{F}^A$ .

cuantitativos. La complejidad del mismo es  $O(n^2)$ .

$$\Pr(\text{card}_X = j) = \begin{cases} \Pr(\text{card}_{XE^m} = 0) (1 - \mu_X(e_{i+1})) & : j = 0 \\ \Pr(\text{card}_{XE^m} = j) (1 - \mu_X(e_{i+1})) \\ + \Pr(\text{card}_{XE^m} = j - 1) \mu_X(e_{i+1}) & : 1 \leq j \leq m \\ \Pr(\text{card}_{XE^m} = m) \mu_X(e_{i+1}) & : j = m + 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

### B.1.3. Cuantificadores binarios cuantitativos conservativos

En este apartado presentamos el algoritmo para evaluar cuantificadores cuantitativos binarios conservativos (véase la sección 4.3.1), que como caso particular

incluyen el interesante caso de los cuantificadores proporcionales<sup>1</sup>. La estrategia que se va a plantear es algo distinta de la utilizada para los cuantificadores cuantitativos unarios, y fácilmente generalizable a otros tipos de cuantificadores.

Recuérdese que el valor de un cuantificador semi-borroso  $Q(Y_1, Y_2)$  cuantitativo conservativo está completamente determinado por las cardinalidades de  $|Y_1|$  e  $|Y_1 \cap Y_2|$ ; es decir, existe una función  $q : \{0, \dots, m\}^2 \rightarrow \mathbf{I}$  tal que

$$Q(Y_1, Y_2) = q(|Y_1|, |Y_1 \cap Y_2|)$$

para todo  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

Sean  $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$  dos conjuntos borrosos. Por

$$\begin{aligned} & \Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k)) \\ &= \sum_{Y_1 \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y_2 \in \mathcal{P}(E) \mid |Y_1| = j \wedge |Y_1 \cap Y_2| = k} m_{X_1}(Y_1) m_{X_2}(Y_2), 0 \leq k, j \leq m \end{aligned}$$

denotamos la probabilidad de escoger un par de representantes  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(E)$  de  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$  tales que  $|Y_1| = j$  y  $|Y_1 \cap Y_2| = k$ . Nótese que

$$\Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k)) = 0$$

para  $k > j$ .

Sean  $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E^m)$  ( $E^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ ) dos conjuntos borrosos sobre  $E^m$ . Y supongamos conocidas las probabilidades

$$\Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k))$$

para todo  $j, k$  tales que  $0 \leq j, k \leq m$ . Supongamos ahora que añadimos un elemento ( $e_{m+1}$ ) al referencial. Es decir, el conjunto referencial es ahora  $E^{m+1} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ . Y sean  $X'_1, X'_2 \in \tilde{\mathcal{P}}(E^{m+1})$  conjuntos borrosos sobre  $E^{m+1}$  tales que  $(X'_1)^{E^m} = X_1, (X'_2)^{E^m} = X_2$ ; es decir, las proyecciones de  $X'_1, X'_2$  sobre  $E^m$  son  $X_1, X_2$ .

Nótese que la pertenencia del elemento  $e_{m+1}$  al conjunto  $X'_i, i = 1, 2$  es un suceso de probabilidad  $u_{X_i}(e_{m+1})$ , y que dicha pertenencia se considera independiente de las pertenencias de otros elementos, para la interpretación de conjuntos borrosos

<sup>1</sup>Aunque el algoritmo que se desarrolla en este apartado se puede utilizar para evaluar cuantificadores absolutos, este caso se resuelve más eficientemente utilizando la transformación a cuantificación unaria planteada en la sección 4.3.1.

que subyace al QFM  $\mathcal{F}^A$ . Por lo tanto, si la cardinalidad de  $X, X_2$  es  $(j, k)^2$  y se da el hecho de que  $e_{m+1} \in X'_1$  y  $e_{m+1} \in X'_2$  entonces la cardinalidad de  $X'_1 X'_2$  será  $(j + 1, k + 1)$ .

Sean ahora  $0 \leq j, k \leq m$  arbitrarios y considérese la probabilidad  $\Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k))$ . Cuando consideramos el elemento  $e_{m+1}$  la probabilidad anterior aporta a la probabilidad  $\Pr(\text{card}_{X'_1, X'_1 \cap X'_2} = (j, k))$  el valor:

$$\begin{aligned} & (1 - \mu_{X'_1}(e_{m+1})) (1 - \mu_{X'_2}(e_{m+1})) \Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k)) + \\ & + (1 - \mu_{X'_1}(e_{m+1})) \mu_{X'_2}(e_{m+1}) \Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k)) \\ & = (1 - \mu_{X'_1}(e_{m+1})) \Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k)) \end{aligned}$$

Es decir, dado que la cardinalidad  $\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2}$  es  $(j, k)$  entonces la cardinalidad  $\text{card}_{X'_1, X'_1 \cap X'_2}$  será  $(j, k)$  con probabilidad  $(1 - \mu_{X'_1}(e_{m+1}))$ . Nótese que si  $e_{m+1} \notin X'_1$  y  $e_{m+1} \in X'_2$  entonces  $e_{m+1} \notin X'_1 \cap X'_2$ .

A la probabilidad  $\Pr(\text{card}_{X'_1, X'_1 \cap X'_2} = (j + 1, k))$  le aporta el valor:

$$\mu_{X'_1}(e_{m+1}) (1 - \mu_{X'_2}(e_{m+1})) \Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k))$$

Es decir, dado que la cardinalidad  $\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2}$  es  $(j, k)$  entonces la cardinalidad  $\text{card}_{X'_1, X'_1 \cap X'_2}$  será  $(j + 1, k)$  con probabilidad  $\mu_{X'_1}(e_{m+1}) (1 - \mu_{X'_2}(e_{m+1}))$ .

A la probabilidad  $\Pr(\text{card}_{X'_1, X'_1 \cap X'_2} = (j + 1, k + 1))$  le aporta el valor:

$$\mu_{X'_1}(e_{m+1}) \mu_{X'_2}(e_{m+1}) \Pr(\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2} = (j, k))$$

es decir, dado que la cardinalidad  $\text{card}_{X_1, X_1 \cap X_2}$  es  $(j, k)$  entonces la cardinalidad  $\text{card}_{X'_1, X'_1 \cap X'_2}$  será  $(j + 1, k + 1)$  con probabilidad  $\mu_{X'_1}(e_{m+1}) \mu_{X'_2}(e_{m+1})$ .

A partir del razonamiento anterior es fácil plantear el algoritmo para evaluar cuantificadores semi-borrosos cuantitativos conservativos con el modelo  $\mathcal{F}^A$  (véase la tabla B.2). La complejidad del algoritmo es  $O(n^3)$ .

## B.2. Algoritmos para el modelo $\mathcal{F}^{MD}$

Presentamos a continuación los algoritmos del QFM  $\mathcal{F}^{MD}$ . Recordamos que el QFM  $\mathcal{F}^{MD}$  es una generalización al caso semi-borroso del modelo planteado en [80,

<sup>2</sup>En la interpretación de los conjuntos borrosos que subyace al QFM  $\mathcal{F}^A$  un conjunto borroso es una función de probabilidad sobre el espacio de conjuntos nítidos, por lo que tiene una cardinalidad determinada, aunque desconocida.

<b>Algoritmo para evaluar <math>\mathcal{F}^A(Q)(X_1, X_2)</math></b>
Complejidad $O(n^3)$
<pre> INPUT: double <math>X_1[0, \dots, m-1]</math>, <math>X_2[0, \dots, m-1]</math>; <math>m \geq 1; q : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbf{I}</math> conservativa  double card[0, ..., m][0, ..., m], card_aux[0, ..., m][0, ..., m]; result = 0; i = 0; card[0,0] = 1; while (i &lt; m) {     clear(card_aux);     v_i_00 = (1 - X<sub>1</sub>[i]) × (1 - X<sub>2</sub>[i]);     v_i_01 = (1 - X<sub>1</sub>[i]) × X<sub>2</sub>[i];     v_i_10 = X<sub>1</sub>[i] × (1 - X<sub>2</sub>[i]);     v_i_11 = X<sub>1</sub>[i] × X<sub>2</sub>[i];     for (j = 0; j &lt;= i; j++) {         for (k = 0; k &lt;= j; k++) {             card_aux[j,k] = card_aux[j,k] + (v_i_00 + v_i_01) * card[j,k];             card_aux[j+1,k] = card_aux[j+1,k] + v_i_10*card[j,k];             card_aux[j+1,k+1] = card_aux[j+1,k+1] + v_i_11*card[j,k];         }     }     copy(card_aux, card);     i = i + 1; } for (j = 0; j &lt;= m; j++) {     for (k = 0; k &lt;= j; k++) {         result = result + card[j,k]*q(j,k);     } } return result; </pre>

**Tabla B.2:** Algoritmo para evaluar cuantificadores binarios conservativos con el modelo  $\mathcal{F}^A$ .

sección 3.3.2. y sección 3.4.1.], [22, pág. 37], por lo que los algoritmos que vamos a plantear son muy similares a los planteados en [80, sección 3.3.2. y sección 3.4.1.].

### B.2.1. Cuantificadores estándar

En esta sección damos las expresiones que nos permiten evaluar los cuantificadores existencial y universal en el caso unario.

**Teorema 52** *Sea  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  un referencial finito. Se cumple que*

$$\mathcal{F}^{MD}(\exists)(X) = \bigvee_{i=1}^m \mu_X(e_i) = \text{máx} \{\mu_X(e_i) : 1 \leq i \leq m\}$$

$$\mathcal{F}^{MD}(\forall)(X) = \bigwedge_{i=1}^m \mu_X(e_i) = \text{mín} \{\mu_X(e_i) : 1 \leq i \leq m\}$$

para todo  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ .

**Demostración.** Como consecuencia del cumplimiento de la propiedad de coherencia con la lógica en el caso unario. ■

### B.2.2. Cuantificadores unarios cuantitativos

Sea  $Q : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbf{I}$  un cuantificador semi-borroso unario cuantitativo. La expresión que nos permite calcular  $\mathcal{F}^{MD}(Q)$  es la siguiente:

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X) = \sum_{i=0}^m (\alpha_i - \alpha_{i+1}) Q((X)_{\geq \alpha_i})$$

donde  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m$  denotan los valores de pertenencia en  $E$  de los elementos del conjunto borroso  $X \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_{m+1} = 0$ .

A partir de la expresión anterior es muy fácil desarrollar el algoritmo que nos permite evaluar cuantificadores unarios cuantitativos con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ . Se presenta en la tabla B.3.

### B.2.3. Cuantificadores binarios cuantitativos conservativos

La expresión que permite aplicar el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  a un cuantificador semi-borroso binario conservativo  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  es la siguiente:

Algoritmo para evaluar $\mathcal{F}^{MD}(Q)(X)$
Complejidad $O(n \log n)$
<pre> INPUT: double <math>X[0, \dots, m-1]</math>; <math>m \geq 1</math>; <math>q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{I}</math> double <math>OR\_X_1[0, \dots, m+1]</math>; result = 0; <math>OR\_X_1[1, \dots, m] = \text{sort}(X_1)</math>; <math>OR\_X_1[0] = 1</math>; <math>OR\_X_1[m+1] = 0</math>; for (i = 0; i &lt;= m; i++)     result = result + q(i)*(<math>OR\_X_1[i] - OR\_X_1[i+1]</math>); return result;</pre>

**Tabla B.3:** Algoritmo para evaluar cuantificadores unarios cuantitativos con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ .

$$\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, X_2) = \sum_{i=0}^m (\alpha_i - \alpha_{i+1}) Q((X_1)_{\geq \alpha_i}, (X_2)_{\geq \alpha_i})$$

donde  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_m$  denotan los valores de pertenencia en  $E$  de los elementos de los conjuntos borrosos  $X_1, X_2$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_{m+1} = 0$ .

Aunque el algoritmo que se desarrolla en este apartado se puede utilizar para evaluar cuantificadores absolutos, este caso se resuelve más eficientemente utilizando la transformación a cuantificación unaria planteada en la sección 4.3.1.

Nótese que se cumple que:

$$|(X_1)_{\geq \alpha} \cap (X_2)_{\geq \alpha}| = |(X_1 \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha}|$$

Además, como  $X_1 \tilde{\cap} X_2 \subseteq X_1$  se cumple que

$$(X_1 \tilde{\cap} X_2)_{\geq \alpha} \subseteq (X_1)_{> \alpha}$$

para todo  $\alpha \geq 0$ .

Consideremos ahora la notación vectorial que vamos a utilizar para almacenar computacionalmente los conjuntos borrosos. Sean  $vX_1$  y  $vX_1 \tilde{\cap} X_2$  los vectores que utilizamos para almacenar los conjuntos  $X_1$  y  $X_1 \tilde{\cap} X_2$  respectivamente. Consi-

deremos ahora sus versiones ordenadas:

$$\begin{aligned} OR_{X_1} &= \text{sort}(vX_1) \\ OR_{X_1 \text{inter} X_2} &= \text{sort}(vX_1 \text{inter} X_2) \end{aligned}$$

Sea  $\alpha \in [0, 1]$  un nivel de corte arbitrario, y sea  $i$  el índice del mayor elemento del vector  $OR_{X_1}$  cumpliendo que  $OR_{X_1}[i] \geq \alpha$ . Como el vector está ordenado se cumple que para todo  $j$  tal que  $0 \leq j \leq i$ ,  $OR_{X_1}[j] \geq \alpha$  y para todo  $j$  tal que  $i + 1 \leq j \leq m$ ,  $OR_{X_1}[j] < \alpha$ .

Sea ahora  $j$  el índice del mayor elemento del vector  $OR_{X_1 \text{inter} X_2}$  cumpliendo que  $OR_{X_1 \text{inter} X_2}[j] \geq \alpha$ . Entonces como  $(X_1 \cap X_2)_{\geq \alpha} \subseteq (X_1)_{\geq \alpha}$  se cumple que  $j \leq i$ . Por lo tanto, todos los elementos asociados al rango  $0 \leq k \leq j$  de  $OR_{X_1 \text{inter} X_2}$  están en el rango  $0 \leq j \leq i$  de  $OR_{X_1}$ .

Con esta explicación es fácil comprender el algoritmo presentado en la figura B.4 que permite evaluar cuantificadores binarios conservativos con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ .

### B.3. Algoritmos para el modelo $\mathcal{F}^I$

Este modelo coincide con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$  para cuantificadores unarios, con lo cual en el caso unario los algoritmos coinciden con los descritos en el apartado anterior. Por lo tanto plantearemos únicamente el algoritmo para evaluar cuantificadores binarios conservativos.

#### B.3.1. Cuantificadores binarios cuantitativos conservativos

Recordemos primeramente que para aplicar el modelo  $\mathcal{F}^I$  a conjuntos finitos podemos utilizar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) \\ = \sum_{i_1=0}^m \dots \sum_{i_n=0}^m Q\left((X_1)_{\geq \alpha_{1,i_1}}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_{n,i_n}}\right) m(\alpha_{1,i_1}) \dots m(\alpha_{n,i_n}) \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{r,1} \geq \dots \geq \alpha_{r,m}$  denota los grados de pertenencia de los elementos de  $E$  al conjunto borroso  $X_r$ ,  $1 \leq r \leq n$ ,  $\alpha_{r,0} = 1$ ,  $\alpha_{r,m+1} = 0$ ; y  $m(\alpha_{r,j}) = \alpha_{r,j} - \alpha_{r,j+1}$ ,  $j = 0, \dots, m$ .

Algoritmo para evaluar $\mathcal{F}^{MD}(Q)(X_1, X_2)$
Complejidad $O(n \log n)$
<pre> INPUT: double <math>X_1[0, \dots, m-1]</math>, <math>X_2[0, \dots, m-1]</math>; <math>m \geq 1; q : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbf{I}</math> conservativa double <math>OR\_X_1[0, \dots, m-1]</math>, <math>OR\_X_1 \text{ inter } X_2[0, \dots, m-1]</math>; result = 0; <math>OR\_X_1 = \text{sort}(X_1)</math>; <math>OR\_X_1 \text{ inter } X_2 = \text{sort}(X_1 \tilde{\cap} X_2)</math>; i = j = 0; alfa_i = 1; while (i &lt; m)     if (<math>OR\_X_1[i] &gt; OR\_X_1 \text{ inter } X_2[j]</math>)         alfa_i_more_1 = <math>OR\_X_1[i]</math>;         result = result + <math>q(i, j) * (alfa\_i - alfa\_i\_more\_1)</math>;         i = i + 1;     else if (<math>OR\_X_1[i] == OR\_X_1 \text{ inter } X_2[j]</math>)         alfa_i_more_1 = <math>OR\_X_1[i]</math>;         result = result + <math>q(i, j) * (alfa\_i - alfa\_i\_more\_1)</math>;         i = i + 1;         j = j + 1;     else         alfa_i_more_1 = <math>OR\_X_1 \text{ inter } X_2[j]</math>;         result = result + <math>q(i, j) * (alfa\_i - alfa\_i\_more\_1)</math>;         j = j + 1;     alfa_i = alfa_i_more_1; while (j &lt; m)     alfa_i_more_1 = <math>OR\_X_1 \text{ inter } X_2[j]</math>;     result = result + <math>q(i, j) * (alfa\_i - alfa\_i\_more\_1)</math>;     j = j + 1;     alfa_i = alfa_i_more_1; result = result + <math>q(i, j) * alfa\_i</math>; return result; </pre>

**Tabla B.4:** Algoritmo para evaluar cuantificadores binarios conservativos con el modelo  $\mathcal{F}^{MD}$ .

Para facilitar la explicación del algoritmo para evaluar cuantificadores conservativos con el QFM  $\mathcal{F}^I$  nos vamos a apoyar en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 53** Sea  $Q : \mathcal{P}(E)^2 \rightarrow \mathbf{I}$  el siguiente cuantificador semi-borroso

$$Q(Y_1, Y_2) = \begin{cases} \max\left(2 \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} - 1, 0\right) & X_1 \neq \emptyset \\ 1 & X_1 = \emptyset \end{cases}$$

y  $X_1, X_2$  los siguientes conjuntos borrosos:

$$X_1 = \{0,7/e_1, 0,1/e_2, 0,1/e_3, 1/e_4, 0,4/e_5, 0,3/e_6\}$$

$$X_2 = \{0,3/e_1, 0,5/e_2, 0,1/e_3, 0,8/e_4, 1/e_5, 0,5/e_6\}$$

Se plantea la evaluación de  $\mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2)$ . Para ello calculamos primeramente los alfa-cortes de  $X_1$  y  $X_2$ .

Los conjuntos  $X_1$  y  $X_2$  ordenados son (en notación vectorial)

$$\text{sort\_}X_1 = [1/e_4, 0,7/e_1, 0,4/e_5, 0,3/e_6, 0,1/e_2, 0,1/e_3]$$

$$\text{sort\_}X_2 = [1/e_5, 0,8/e_4, 0,5/e_2, 0,5/e_6, 0,3/e_1, 0,1/e_3]$$

Las siguientes permutaciones permiten recuperar los conjuntos  $X_1$  y  $X_2$  iniciales también en notación vectorial

$$PO\_SX1 = [4, 1, 5, 6, 2, 3]$$

$$PO\_SX2 = [5, 4, 2, 6, 1, 3]$$

Denotaremos por  $\text{sort\_}X_1(i)$  los  $e_i$ s asociados a las posiciones  $1, \dots, i$  del vector  $\text{sort\_}X_1$ . Por ejemplo,

$$\text{sort\_}X_1(2) = \{e_4, e_1\}$$

$$\text{sort\_}X_1(0) = \emptyset$$

y de igual manera para  $sort\_X_2$ .

Los niveles de corte  $\alpha_{1,0}, \dots \geq \alpha_{1,7}$  de  $X_1$  son:

$$\alpha_{1,i} = [1, 1, 0, 7, 0, 4, 0, 3, 0, 1, 0, 1, 0], 0 \leq i \leq 7$$

$$\alpha_{2,i} = [1, 1, 0, 8, 0, 5, 0, 5, 0, 3, 0, 1, 0], 0 \leq i \leq 7$$

A continuación presentamos los conjuntos  $sort\_X_1(i)$  y  $sort\_X_2(i)$  para los niveles de corte y sus probabilidades asociadas:

$\alpha_i$	$sort\_X_1(i)$	$m_{X_1}$
$\alpha_0 = 1$	$sort\_X_1(0) = \emptyset$	$m(\alpha_0) = \alpha_0 - \alpha_1 = 0$
$\alpha_1 = 1$	$sort\_X_1(1) = \{e_4\}$	$m(\alpha_1) = \alpha_1 - \alpha_2 = 0,3$
$\alpha_2 = 0,7$	$sort\_X_1(2) = \{e_4, e_1\}$	$m(\alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_3 = 0,3$
$\alpha_3 = 0,4$	$sort\_X_1(3) = \{e_4, e_1, e_5\}$	$m(\alpha_3) = \alpha_3 - \alpha_4 = 0,1$
$\alpha_4 = 0,3$	$sort\_X_1(4) = \{e_4, e_1, e_5, e_6\}$	$m(\alpha_4) = \alpha_4 - \alpha_5 = 0,2$
$\alpha_5 = 0,1$	$sort\_X_1(5) = \{e_4, e_1, e_5, e_6, e_3\}$	$m(\alpha_5) = \alpha_5 - \alpha_6 = 0$
$\alpha_6 = 0,1$	$sort\_X_1(6) = \{e_4, e_1, e_5, e_6, e_3, e_2\}$	$m(\alpha_6) = \alpha_6 - \alpha_7 = 0,1$

$\alpha_i$	$sort\_X_2(i)$	$m_{X_2}$
$\alpha_0 = 1$	$sort\_X_2(0) = \emptyset$	$m(\alpha_0) = \alpha_0 - \alpha_1 = 0$
$\alpha_1 = 1$	$sort\_X_2(1) = \{e_5\}$	$m(\alpha_1) = \alpha_1 - \alpha_2 = 0,2$
$\alpha_2 = 0,8$	$sort\_X_2(2) = \{e_5, e_4\}$	$m(\alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_3 = 0,3$
$\alpha_3 = 0,5$	$sort\_X_2(3) = \{e_5, e_4, e_2\}$	$m(\alpha_3) = \alpha_3 - \alpha_4 = 0$
$\alpha_4 = 0,5$	$sort\_X_2(4) = \{e_5, e_4, e_2, e_6\}$	$m(\alpha_4) = \alpha_4 - \alpha_5 = 0,2$
$\alpha_5 = 0,3$	$sort\_X_2(5) = \{e_5, e_4, e_2, e_6, e_1\}$	$m(\alpha_5) = \alpha_5 - \alpha_6 = 0,2$
$\alpha_6 = 0,1$	$sort\_X_2(6) = \{e_5, e_4, e_2, e_6, e_1, e_3\}$	$m(\alpha_6) = \alpha_6 - \alpha_7 = 0,1$

Nótese que se cumple que  $sort\_X_j(i) = (X_j)_{\geq \alpha_i}$  si  $m(\alpha_i) \neq 0$ .

Y a continuación representamos parte de la tabla de probabilidades cruzadas que permite calcular  $\mathcal{F}^1(Q)(X_1, X_2)$ . En cada celda, el primer elemento del par  $(i, j)$  representa la cardinalidad de  $sort\_X_1(i) \cap sort\_X_2(j)$ , y el segundo la cardinalidad

de  $sort\_X_1$ . El último valor representa la probabilidad asociada a la celda:

$sort\_X_2, sort\_X_1$	$sort\_X_1(0) : 0$	$sort\_X_1(1) : 0,3$	$sort\_X_1(2) : 0,3$	...
$sort\_X_2(0) : 0$	$(0,0) / 0$	$(0,1) / 0$	$(0,2) / 0$	
$sort\_X_2(1) : 0,2$	$(0,0) / 0$	$(0,1) / 0,06$	$(0,2) / 0,06$	
$sort\_X_2(2) : 0,3$	$(0,0) / 0$	$(1,1) / 0,09$	$(1,2) / 0,09$	
$sort\_X_2(3) : 0$	$(0,0) / 0$	$(1,1) / 0$	$(1,2) / 0$	
$sort\_X_2(4) : 0,2$	$(0,0) / 0$	$(1,1) / 0,06$	$(1,2) / 0,06$	
$sort\_X_2(5) : 0,2$	$(0,0) / 0$	$(1,1) / 0,06$	$(2,2) / 0,06$	
$sort\_X_2(6) : 0,1$	$(0,0) / 0$	$(1,1) / 0,03$	$(2,2) / 0,03$	

El resultado de evaluar la expresión es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2) &= \sum_{i,j} q(i,j) \cdot \Pr(i,j) \\ &= 0,39 \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior, sea  $\{e_k\} = sort\_X_1(j) \setminus sort\_X_1(j-1)$ . Como se comprueba fácilmente en la tabla de cardinalidades cruzadas se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} &|sort\_X_1(i) \cap sort\_X_2(j)| \\ &= \begin{cases} |sort\_X_1(i) \cap sort\_X_2(j-1)| & : e_k \notin sort\_X_2(j) \\ |sort\_X_1(i) \cap sort\_X_2(j-1)| + 1 & : e_k \in sort\_X_2(j) \end{cases} \end{aligned}$$

Además, al estar los representantes  $sort\_X_2(j)$  encajados ( $sort\_X_2(0) \subseteq sort\_X_2(1) \subseteq \dots \subseteq sort\_X_2(6)$ ), si  $e_k \in sort\_X_2(j)$ , entonces  $e_k \in sort\_X_2(r)$  para todo  $r \geq j$ ; es decir, existe una posición  $s$  a partir de la cual todos los representantes  $sort\_X_2(j)$  con  $j \geq s$  contienen a  $e_k$ .

Nótese que

$$PO\_SX1(k)$$

es la posición de  $e_k$  en el vector original que contiene a  $X_1$ . Por lo tanto

$$PO\_SX2^{-1}(PO\_SX1(k))$$

donde por  $PO\_SX2^{-1}$  denotamos la permutación inversa de  $PO\_SX2$ , es la posición en el vector ordenado del elemento  $e_k$ . En la relación de conjuntos encajados

Algoritmo para evaluar $\mathcal{F}^I(Q)(X_1, X_2)$
Complejidad $O(n^2)$
<pre> INPUT: double <math>X_1[0, \dots, m-1]</math>, <math>X_2[0, \dots, m-1]</math>; <math>m \geq 1</math>; <math>q : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbf{I}</math> conservativa double card_inter[0, \dots, m-1], OR_X1[0, \dots, m], PO_SX1[0, \dots, m-1], PO_SX1<sup>-1</sup>[0, \dots, m-1]; double OR_X2[0, \dots, m], PO_SX2[0, \dots, m-1], PO_SX2<sup>-1</sup>[0, \dots, m-1]; card_inter = zeros(m); (OR_X1, PO_SX1, PO_SX1<sup>-1</sup>) = sort(X1); (OR_X2, PO_SX2, PO_SX2<sup>-1</sup>) = sort(X2); OR_X1[m] = 0; OR_X2[m] = 0; result = 0; result = result + q(0,0) * (1 - OR_X1[0]); for (i = 0; i &lt; m; i++) {     change = false;     result = result + q(i+1,0)*         (OR_X1[i] - OR_X1[i + 1])*(1 - OR_X2[0]);     for (j = 0; j &lt; m; j++)         if (PO_SX1<sup>-1</sup>[i] == PO_SX2<sup>-1</sup>[j])             change = true;     if (change)         card_inter[j] = card_inter[j]+1;     result = result + q(i+1,card_inter[j])*         (OR_X1[i] - OR_X1[i + 1])*(OR_X2[j] - OR_X2[j + 1]); } return result; </pre>

**Tabla B.5:** Algoritmo para evaluar cuantificadores binarios conservativos con el modelo  $\mathcal{F}^I$ .

$sort\_X_2(0) \subseteq sort\_X_2(1) \subseteq \dots \subseteq sort\_X_2(6)$  el conjunto  $sort\_X_2(PO\_SX_2^{-1}(PO\_SX_1(k)))$  es el primero que contiene a  $e_k$ .

En la tabla B.5 se presenta el algoritmo para evaluar cuantificadores binarios conservativos con el modelo  $\mathcal{F}^I$ . Su seguimiento es inmediato a partir del ejemplo que se acaba de presentar. Las permutaciones se calculan dentro del algoritmo de ordenación, con lo que la complejidad del algoritmo es  $O(n^2)$ .

# Bibliografía

- [1] J. Allan, C. Wade, y A. Bolivar. Retrieval and novelty detection at the sentence level. En *Proc. SIGIR-03, the 26th ACM Conference on Research and Development in Information Retrieval*. ACM press, Toronto, Canada, 2003, págs. 314–321.
- [2] R. Baeza-Yates y B. Ribeiro-Neto. *Modern Information Retrieval*. Addison Wesley, ACM press, 1999.
- [3] J. Baldwin, J. Lawry, y T. Martin. Mass assignment theory of the probability of fuzzy events. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 83, 1996, págs. 353–367.
- [4] S. Barro, A. Bugarín, P. Cariñena, y F. Díaz-Hermida. A framework for fuzzy quantification models analysis. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, 2003, págs. 89–99.
- [5] J. Barwise y R. Cooper. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy*, vol. 4, 1981, págs. 159–219.
- [6] J. V. Benthem. Questions about quantifiers. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 49, 1984, págs. 443–466.
- [7] T. Bilgic y I. Türksen. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, capítulo Measurement of membership functions: Theoretical and empirical work. The handbooks of fuzzy set series. Kluwer Academic Publishers, 2000, págs. 195–230.
- [8] I. J. Blanco, M. Martín-Bautista, D. Sánchez, y M. Vila. A new similarity measure for effectiveness in fuzzy information retrieval. En *Proc. IPMU 2004, the 10th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. Perugia, Italy, July 2004, págs. 1991–1997.

- [9] G. Bordogna y G. Pasi. Linguistic aggregation operators in fuzzy information retrieval. *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 10(2), 1995, págs. 233–248.
- [10] G. Bordogna y G. Pasi. Modeling vagueness in information retrieval. En M. Agosti, F. Crestani, y G. Pasi, editores, *Lectures on Information Retrieval (LNCS 1980)*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000, págs. 207–241.
- [11] P. Bosc y J. Kacprzyk, editores. *Fuzziness in Database Management Systems*, vol. 5 de *Studies in Fuzziness*. Physica-Verlag, 1995.
- [12] P. Bosc y L. Lietard. Monotonic quantified statements and fuzzy integrals. En *Proceedings 1994 NAFIPS/IFIS/NASA Conference*. 1994, págs. 8–12.
- [13] P. Bosc, L. Lietard, y O. Pivert. Quantified statements and database fuzzy querying. En P. Bosc y J. Kacprzyk, editores, *Fuzziness in Database Management Systems*, vol. 5 de *Studies in Fuzziness*. Physica-Verlag, 1995, págs. 275–308.
- [14] P. Bosc y O. Pivert. Sqlf: A relational database language for fuzzy querying. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3(1), 1995, págs. 1–17.
- [15] P. Cariñena. *A model of Fuzzy Temporal Rules for reasoning on dynamic systems*. Tesis Doctoral, Universidade de Santiago de Compostela, 2003.
- [16] P. Cariñena, A. Bugarín, M. Mucientes, y S. Barro. A language for expressing fuzzy temporal rules. *Mathware and Soft Computing*, vol. 7, 2000, págs. 213–227.
- [17] P. Cariñena, A. Bugarín, M. Mucientes, F. Díaz-Hermida, y S. Barro. A model of fuzzy temporal rules for knowledge representation and reasoning. En *Proceedings of the Eighth International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems - IPMU 2000*, vol. 2. 2000, págs. 1239–1246.
- [18] P. Cariñena, A. Bugarín, M. Mucientes, F. Díaz-Hermida, y S. Barro. *Technologies for Constructing Intelligent Systems*, vol. 2, capítulo Fuzzy Temporal Rules: A Rule-based Approach for Fuzzy Temporal Knowledge Representation and Reasoning. Springer-Verlag, 2002, págs. 237–250.

- [19] M. Delgado, D. Sánchez, y M. A. Vila. Un enfoque lógico para calcular el grado de cumplimiento de sentencias con cuantificadores lingüísticos. En *Actas VII Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'97)*. 1997, págs. 15–20.
- [20] M. Delgado, D. Sánchez, y M. A. Vila. Un método para la evaluación de sentencias con cuantificadores lingüísticos. En *Actas del VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'98)*. 1998, págs. 193–198.
- [21] M. Delgado, D. Sánchez, y M. A. Vila. A survey of methods for evaluating quantified sentences. En *Proc. First European Society for fuzzy logic and technologies conference (EUSFLAT'99)*. 1999, págs. 279–282.
- [22] M. Delgado, D. Sánchez, y M. A. Vila. Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 23(1), 2000, págs. 23–66.
- [23] M. Delgado, D. Sánchez, y M. A. Vila. *Fuzzy Logic in Medicine*, vol. 83 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, capítulo Acquisition of Fuzzy Association Rules from Medical Data. Physica-Verlag, 2002, págs. 286–310.
- [24] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, y S. Barro. Definition and classification of semi-fuzzy quantifiers for the evaluation of fuzzy quantified sentences. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 34(1), 2003, págs. 49–88.
- [25] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, y S. Barro. Evaluación probabilística de proposiciones cuantificadas borrosas. En *Actas del X Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2000)*. 2000, págs. 477–482.
- [26] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, y S. Barro. A general framework for probabilistic approaches to fuzzy quantification. En *Proceedings of the International Conference in Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT2001)*. 2001, págs. 34–37.
- [27] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, y S. Barro. Un esquema probabilístico para el tratamiento de sentencias cuantificadas sobre fórmulas. En *Actas del XI Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2002)*. 2002, págs. 391–396.

- [28] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, y S. Barro. Random set-based approaches for modelling fuzzy operators. En *Modelling with Words. Learning, Fusion and Reasoning within a Formal Linguistic Representation Framework*. J. Lawry and J. Shanahan and A. Ralescu, 2003, págs. 1–25.
- [29] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, y S. Barro. Voting model based evaluation of fuzzy quantified sentences: a general framework. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 146, 2004, págs. 97–120.
- [30] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, y D. Losada. Efficient evaluation of similarity quantified expressions in the temporal domain. En *International Conference on Soft Methods in Probability and Statistics (SMPS 2006)*. 2006, pág. Aceptado.
- [31] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, M. Mucientes, D. Losada, y S. Barro. Modelling fuzzy quantified statements under a voting model interpretation of fuzzy sets. En T. Bilgic, B. D. Baets, y O. K. (Eds.), editores, *Fuzzy Sets and Systems - IFSA 2003*. LNAI 2715, Springer, 2003, págs. 151–158.
- [32] F. Díaz-Hermida, P. Cariñena, A. Bugarín, y S. Barro. Modelling of task-oriented vocabularies: an example in fuzzy temporal reasoning. En *Proceedings of the tenth IEEE International Conference on Fuzzy Systems (Fuzz-IEEE'01)*. 2001, págs. 43–46.
- [33] F. Díaz-Hermida, P. Cariñena, A. Bugarín, y S. Barro. Probabilistic evaluation of fuzzy quantified sentences: Independence profile. *Mathware and Soft Computing*, vol. VIII(3), 2001, págs. 255–274.
- [34] F. Díaz-Hermida, D. Losada, A. Bugarín, y S. Barro. A novel probabilistic quantifier fuzzification mechanism for information retrieval. En *Proc. IPMU 2004, the 10th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. Perugia, Italy, July 2004, págs. 1357–1364.
- [35] F. Díaz-Hermida, D. Losada, A. Bugarín, y S. Barro. A probabilistic quantifier fuzzification mechanism: The model and its evaluation for information retrieval. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13(1), 2005, págs. 688–700.
- [36] D. Dubois y H. Prade. Fuzzy cardinality and the modeling of imprecise quantification. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 16, 1985, págs. 199–230.

- [37] D. Dubois y H. Prade. Measuring properties of fuzzy sets: A general technique and its use in fuzzy query evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 38, 1989, págs. 137–152.
- [38] D. Dubois y H. Prade. The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 90(1), 1997, págs. 141–150.
- [39] D. Dubois y H. Prade. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, capítulo Fuzzy Sets: History and basic notions. The handbooks of fuzzy set series. Kluwer Academic Publishers, 2000, págs. 21–124.
- [40] L. Gamut. *Logic, Language and Meaning*, vol. II de *Logic, Language, and Meaning*. The University of Chicago Press, 1984.
- [41] I. Glöckner. *DFS- an axiomatic approach to fuzzy quantification*. Informe Técnico TR97-06, Techn. Fakultät, Universität Bielefeld, 1997. [Http://pi7.fernuni-hagen.de/gloeckner/](http://pi7.fernuni-hagen.de/gloeckner/).
- [42] I. Glöckner. *A Framework for Evaluating Approaches to Fuzzy Quantification*. Informe Técnico TR99-03, Techn. Fakultät, Universität Bielefeld, 1999. [Http://pi7.fernuni-hagen.de/gloeckner/](http://pi7.fernuni-hagen.de/gloeckner/).
- [43] I. Glöckner. *Advances in DFS Theory*. Informe Técnico TR2000-01, Techn. Fakultät, Universität Bielefeld, 2000. [Http://pi7.fernuni-hagen.de/gloeckner/](http://pi7.fernuni-hagen.de/gloeckner/).
- [44] I. Glöckner. Evaluation of quantified propositions in generalized models of fuzzy quantification. *Journal on Approximate Reasoning*, vol. 37(2), September 2003, págs. 93–126.
- [45] I. Glöckner. *Fuzzy Quantifiers in Natural Language: Semantics and Computational Models*. Tesis Doctoral, Universität Bielefeld, 2003.
- [46] I. Glöckner. Fuzzy quantifiers, multiple variable binding and branching quantification. En T. Bilgic, B. D. Baets, y O. K. (Eds.), editores, *Fuzzy Sets and Systems - IFSA 2003*. LNAI 2715, Springer, 2003, págs. 135–142.
- [47] I. Glöckner. *Fuzzy Quantifiers in Natural Language: Semantics and Computational Models*. Der Andere Verlag, 2004.
- [48] I. Glöckner y A. Knöll. *Fuzzy Quantifiers for processing natural language queries in content-based multimedia retrieval systems*. Informe Técnico TR97-05, Technical Faculty, Universität of Bielefeld, 1997.

- [49] I. Glöckner y A. Knöll. Application of fuzzy quantifiers in image processing: A case study. En *Proceedings of the Third International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information Engineering Systems KES '99*. 1999, págs. 259–262.
- [50] I. Glöckner y A. Knöll. A formal theory of fuzzy natural language quantification and its role in granular computing. En W. Pedrycz, editor, *Granular computing: An emerging paradigm*, vol. 70 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag, 2001, págs. 215–256.
- [51] I. Glöckner, A. Knöll, y A. Wolfram. Data fusion based on fuzzy quantifiers. En *Proceedings of EuroFusion98, International Data Fusion Conference*. 1998, págs. 39–46.
- [52] D. Hand, H. Mannila, y P. Smyth. *Principles of Data Mining*. Prentice-Hall International Editions, 2001.
- [53] D. Harman. Relevance feedback revisited. En *Proc. SIGIR-92, the 15th ACM International Conference on Research and Development in Information Retrieval*. Copenhagen, Denmark, June 1992, págs. 1–10.
- [54] D. Harman. Overview of the third text retrieval conference. En *Proc. TREC-3, the 3rd text retrieval conference*. 1994.
- [55] D. Hawking, E. Voorhees, N. Craswell, y P. Bailey. Overview of the trec-8 web track. En *Proc. TREC-8, the 8th Text Retrieval Conference*. Gaithersburg, United States, November 1999, págs. 131–150.
- [56] E. L. Keenan. The semantics of determiners. En S. Lappin, editor, *The Handbook of Contemporary Semantic Theory*, capítulo 2. Blackwell, 1997, págs. 41–63.
- [57] E. L. Keenan y J. Stavi. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy*, vol. 9, 1986, págs. 253–326.
- [58] E. L. Keenan y D. Westerståhl. Generalized quantifiers in linguistics and logic. En J. V. Benthem y A. T. Meulen, editores, *Handbook of Logic and Language*, capítulo 15. Elsevier, 1997, págs. 837–893.
- [59] D. Kraft y D. Buell. A model for a weighted retrieval system. *Journal of the american society for information science*, vol. 32(3), 1981, págs. 211–216.

- [60] D. Kraft y D. Buell. Fuzzy sets and generalized boolean retrieval systems. *International journal of man-machine studies*, vol. 19, 1983, págs. 45–56.
- [61] R. Kruse, J. Gebhardt, y F. Klawonn. *Foundations of Fuzzy Systems*. John Wiley and Sons Inc, 1994.
- [62] M. Lalmas y I. Ruthven. Representing and retrieving structured documents using the dempster-shafer theory of evidence: Modelling and evaluation. *Journal of Documentation*, vol. 54(5), 1998, págs. 529–565.
- [63] J. Lawry. An alternative approach to computing with words. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, vol. 9, 2001, págs. 3–16.
- [64] J. H. Lee. Properties of extended boolean models in information retrieval. En *Proc. of SIGIR-94, the 17th ACM Conference on Research and Development in Information Retrieval*. Dublin, Ireland, July 1994, págs. 182–190.
- [65] J. H. Lee, W. Y. Kim, y Y. J. Lee. On the evaluation of boolean operators in the extended boolean framework. En *Proc. of SIGIR-93, the 16th ACM Conference on Research and Development in Information Retrieval*. Pittsburgh, USA, 1993, págs. 291–297.
- [66] Y. Liu y E. Kerre. An overview of fuzzy quantifiers. (i) interpretations. (ii) reasoning and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 95, 1998, págs. 1–121, 135–146.
- [67] D. Losada, F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, y S. Barro. Experiments on using fuzzy quantified sentences in adhoc retrieval. En *Proc. SAC-04, the 19th ACM Symposium on Applied Computing - Special Track on Information Access and Retrieval*. Nicosia, Cyprus, March 2004, págs. 1059–1066.
- [68] D. Losada, F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, y S. Barro. *Soft Computing in Web Information Retrieval: Models and Applications*, vol. 197 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, capítulo Semi-fuzzy Quantifiers for Information Retrieval. Springer Verlag, 2006, págs. 195–220.
- [69] A. D. Luca y S. Termini. A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information Control*, vol. 20, 1972, págs. 301–312.

- [70] S. Mabuchi. An interpretation of membership functions and the properties of general probabilistic operators as fuzzy set operators-part i: Case of type 1 fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, 1992, págs. 271–283.
- [71] GNU mifluz. <http://www.gnu.org/software/mifluz>. 2001.
- [72] S. Miyamoto. Information retrieval based on fuzzy associations. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 38, 1990, págs. 191–205.
- [73] M. Mucientes, R. Iglesias, C. Regueiro, A. Bugarín, y S. Barro. A fuzzy temporal rule-based velocity controller for mobile robotics. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 134(3; Special Issue: Fuzzy Set Techniques for Intelligent Robotic Systems), 2003, págs. 83–99.
- [74] M. Mucientes, R. Iglesias, C. V. Regueiro, A. Bugarín, P. Cariñena, y S. Barro. Fuzzy temporal rules for mobile robot guidance in dynamic environments. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C*, vol. 33(3), 2001, págs. 391–398.
- [75] Y. Ogawa, T. Morita, y K. Kobayashi. A fuzzy document retrieval system using the keyword connection matrix and a learning method. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 39, 1991, págs. 163–179.
- [76] M. Porter. An algorithm for suffix stripping. En K. Jones y P. Willet, editores, *Readings in Information Retrieval*. Morgan Kaufmann Publishers, 1997, págs. 313–316.
- [77] T. Radecki. Outline of a fuzzy logic approach to information retrieval. *International Journal of Man-Machine studies*, vol. 14, 1981, págs. 169–178.
- [78] A. L. Ralescu. Cardinality, quantifiers, and the aggregation of fuzzy criteria. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 69, 1995, págs. 355–365.
- [79] G. Salton, E. A. Fox, y H. Wu. Extended boolean information retrieval. *Communications of the ACM*, vol. 26(12), 1983, págs. 1022–1036.
- [80] D. Sánchez. *Adquisición de relaciones entre atributos en bases de datos relacionales*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada. E.T.S. de Ingeniería Informática, 1999.

- [81] G. Shafer, editor. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [82] A. Singhal. Modern information retrieval: a brief overview. *IEEE Data Engineering Bulletin*, vol. 24(4), 2001, págs. 35–43.
- [83] A. Singhal, S. Abney, M. Bacchiani, M. Collins, D. Hindle, y F. Pereira. At&t at trec-8. En *Proc. TREC-8, the 8th Text Retrieval Conference*. Gaithersburg, United States, November 1999, págs. 317–330.
- [84] A. Singhal, C. Buckley, y M. Mitra. Pivoted document length normalization. En *Proc. SIGIR-96, the 19th ACM Conference on Research and Development in Information Retrieval*. Zurich, Switzerland, July 1996, págs. 21–29.
- [85] A. Singhal y M. Kaszkiel. At&t at trec-9. En *Proc. TREC-9, the 9th Text Retrieval Conference*. Gaithersburg, United States, November 2000, págs. 103–116.
- [86] H. Smessaert. Monotonicity properties of comparative determiners. *Linguistic and Philosophy*, vol. 19, 1996, págs. 295–336.
- [87] S. Thomas. *Fuzziness and Probability*. ACG Press, 1995.
- [88] TREC: The text retrieval conference. <http://trec.nist.gov>.
- [89] M. Vila, J. Cubero, J. Medina, y O. Pons. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications*, capítulo Using OWA operators in flexible query processing. Kluwer Academic Publishers, 1997, págs. 258–274.
- [90] M. Wygalak. Fuzzy cardinals based on the generalized equality of fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 18, 1986, págs. 143–158.
- [91] M. Wygalak. *Vaguely defined objects*. Series B: Mathematical and statistical methods. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [92] M. Wygalak. Questions of cardinality of finite fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 102, 1999, págs. 185–210.
- [93] R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18(1), 1988, págs. 183–191.

- [94] R. Yager. Connectives and quantifiers in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 40, 1991, págs. 39–75.
- [95] R. Yager. Fuzzy quotient operators for fuzzy relational data bases. En *Proc. of IFES 91*. 1991, págs. 289–296.
- [96] R. Yager. A general approach to rule aggregation in fuzzy logic control. *Applied Intelligence*, vol. 2, 1992, págs. 333–351.
- [97] R. Yager. Counting the number of classes in a fuzzy set. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 23(1), 1993, págs. 257–264.
- [98] R. R. Yager. Quantified propositions in a linguistic logic. *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 19, 1983, págs. 195–227.
- [99] R. R. Yager. Approximate reasoning as a basis for rule-based expert systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 14(4), 1984, págs. 636–642.
- [100] R. R. Yager. General multiple-objective decision functions and linguistically quantified sentences. *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 21, 1984, págs. 389–400.
- [101] M. Ying. Linguistic quantifiers modeled by sugeno integrals. *Artificial Intelligence*, vol. 179, 2006, págs. 581–600.
- [102] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information Sciences*, vol. 8, 1965, págs. 338–353.
- [103] L. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 8, 1983, págs. 149–184.
- [104] L. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4(2), 1996, págs. 103–111.
- [105] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, parts 1-3. *Information Sciences*, vol. 8, 1975, págs. 199–279, 301–357; 9:43–80.
- [106] L. A. Zadeh. Pruf- a meaning representation language for natural languages. *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 10, 1978, págs. 395–460.

- 
- [107] L. A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. En J. Hayes, D. Michie, y L. I. Mikulich, editores, *Machine Intelligence*, vol. 9. Wiley, New York, 1979, págs. 149–194.
- [108] L. A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. En R. Yager, editor, *Fuzzy sets and applications : Selected papers by L.A. Zadeh*. New York : John Wiley and sons, 1987, págs. 569–613.
- [109] H. Zimmermann y P. Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 4, 1980, págs. 37–51.