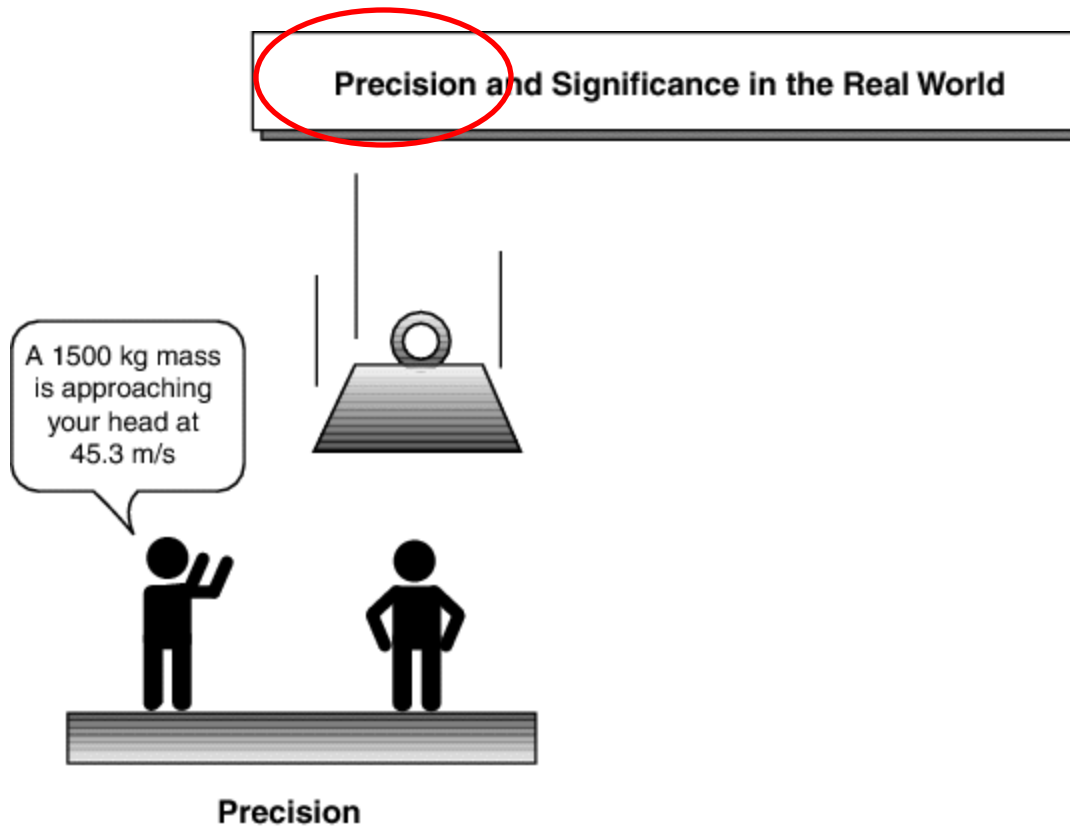


Lógica Borrosa: máquinas que razonan con sentido común

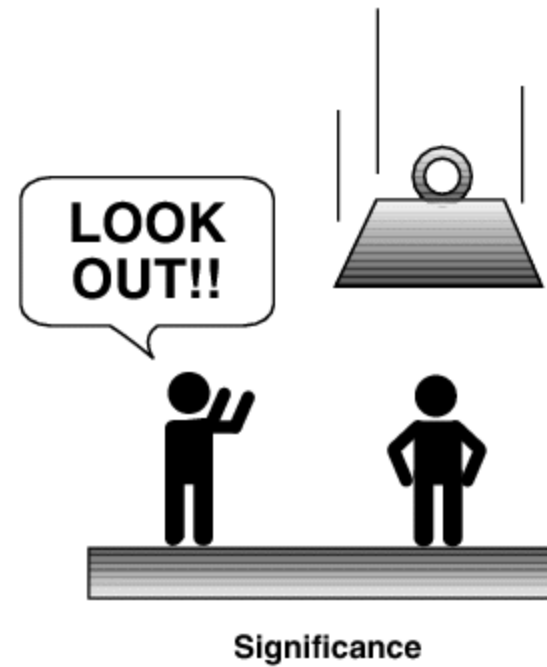
Alberto J. Bugarín Diz

Departamento de Electrónica e Computación

alberto.bugarin.diz@usc.es



Precision and **Significance** in the Real World



- Principio de incompatibilidad:

“A medida que crece la complejidad de un sistema, nuestra capacidad para elaborar sentencias precisas y significativas acerca de su comportamiento disminuye,

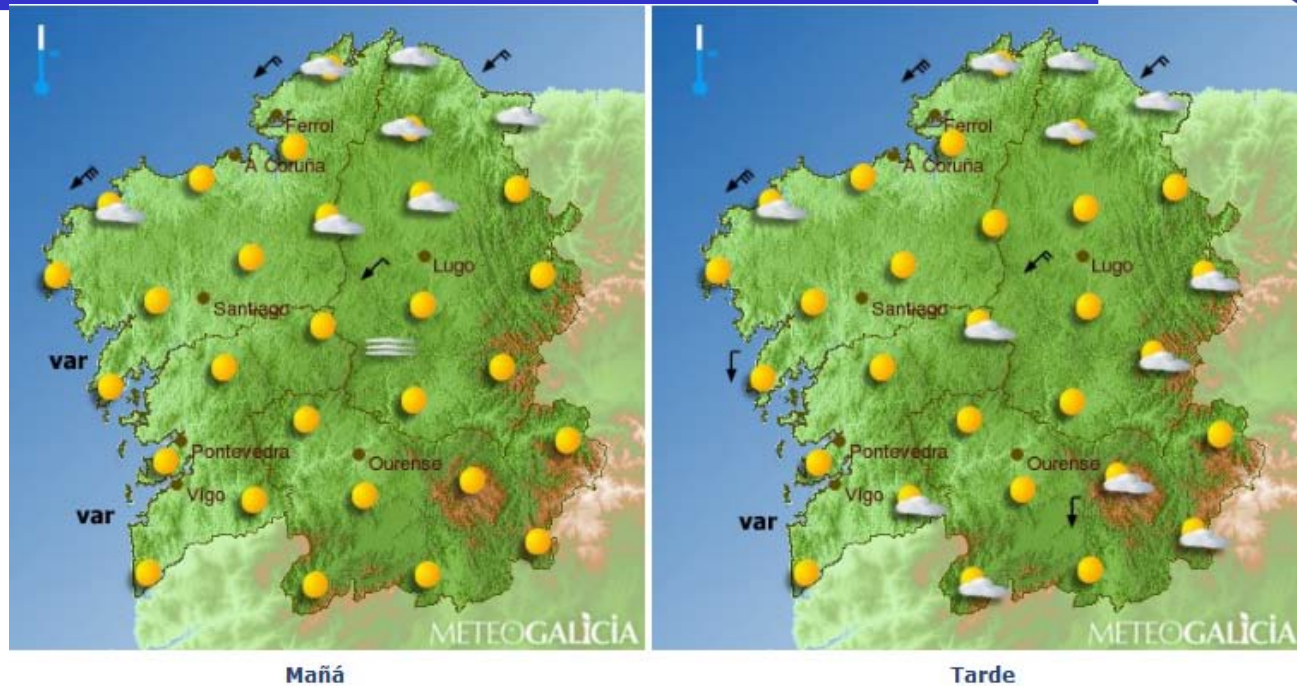
hasta que se alcanza un umbral mas allá del cual la precisión y la significancia se convierten en características mutuamente exclusivas”

Tomado de L. Magdalena (ECSC)

- En cualquier conversación cotidiana incluimos un buen número de términos vagos o imprecisos, sin los cuales la comunicación se convertiría en algo tedioso e improductivo

Ejemplo: “esta mañana, cuando venía hacía aquí, me encontré un calor sofocante que me hizo sudar como nunca”

- La vaguedad de los términos es una herramienta útil para “compactar” información y transmitirla correctamente.
 - Resulta adecuada e informativa para los seres humanos
 - Debe ser representada y modelada en aquellos sistemas que traten de utilizar conocimiento humano



Estado do Ceo

Bancos de néboa matinais en zonas do interior que darán paso a ceos con poucas nubes en xeral pola mañá, agás no norte de Lugo onde haberá intervalos nubosos. Ás últimas horas irán entrando nubes de tipo medio e alto dende o norte.

Néboas

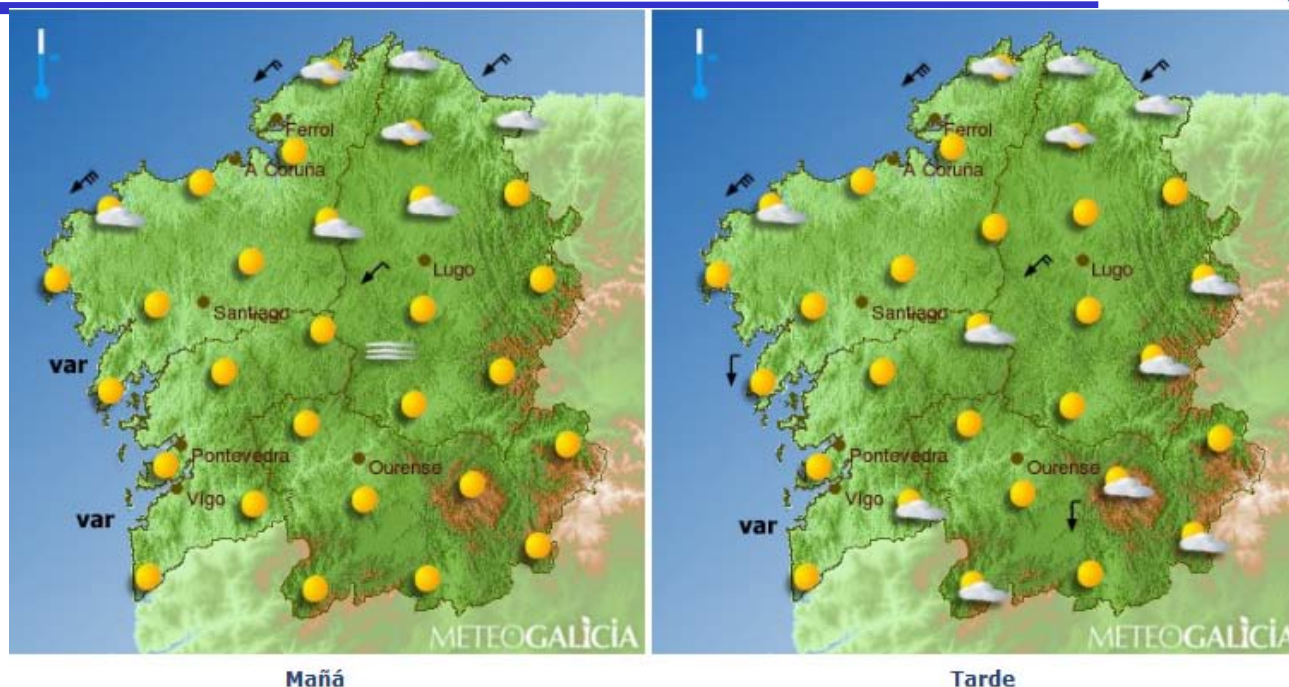
Bancos de néboa matinais en comarcas do interior.

Temperatura

Temperaturas sen cambios significativos, con descensos puntuais no terzo norte e lixeiros repuntes no sector máis sur de Galicia.

Vento

Vento do nordés na metade norte, moderado no litoral, con refachos fortes entre Bares e Fisterra e entre frouxo e moderado no resto; en Pontevedra e Ourense predominarán os momentos de calma, con réxime de brisas nas Rías Baixas.



Estado do Ceo

Bancos de néboa matinais en zonas do interior que darán paso a ceos con poucas nubes en xeral pola mañá, agás no norte de Lugo onde haberá intervalos nubosos. Ás últimas horas irán entrando nubes de tipo medio e alto dende o norte.

Néboas

Bancos de néboa matinais en comarcas do interior.

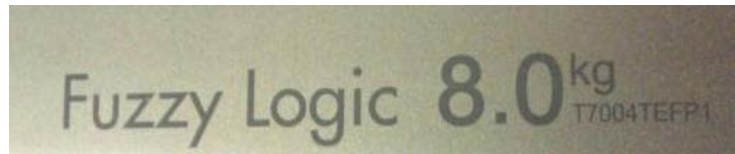
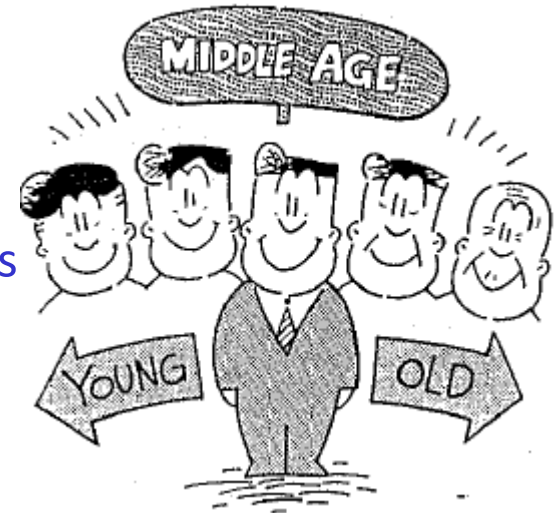
Temperatura

Temperaturas sen cambios significativos, con descenso puntuais no terzo norte e lixeiros repuntes no sector máis sur de Galicia.

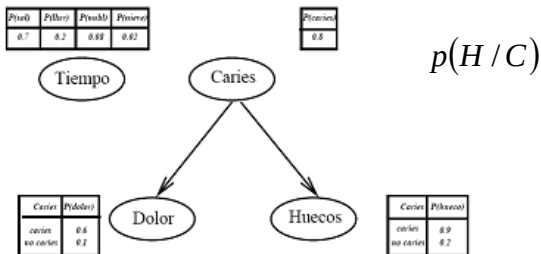
Vento

Vento do nordés na metade norte, moderado no litoral, con refachos fortes entre Bares e Fisterra e entre frouxo e moderado no resto; en Pontevedra e Ourense predominarán os momentos de calma, con réxime de brisas nas Rías Baixas.

- Representación y gestión de la incertidumbre:
 - Términos con definición no totalmente precisa
- Lógica y predicados clásicos ("crisp") restrictivos
 - Los predicados no solo pueden ser V/F
- Algunos modelos:
 - Probabilísticos: redes causales, bayesianas
 - Evidenciales: teoría Dempster-Shafer
 - Borrosos:



Ejemplo de red bayesiana (Russell y Norvig)



	B	H3:0.8	H4:0.2
A			
H1:0.6		H1∩H3 0.48	H1∩H4 0.12
H2:0.4		H2∩H3 0.32	H2∩H4 0.08

$$Creencia(C) = \sum_{D|D \subseteq C} m(D)$$

$$Verosimilitud(C) = \sum_{D|D \cap C \neq \emptyset} m(D)$$



Turbo Drum

Lavado Inteligente. Después de presionar el botón de inicio, i-sensor automáticamente recolecta la información esencial de las condiciones, incluyendo la presión de agua, temperatura y cantidad de detergente, comunicandolo al control para optimizar el lavado y drenado.

Ahorra Energía

Ahorra energía hasta un 10%.





Metro Sendai City, 1987

Helicóptero no tripulado, 1988-1996



Instituto de Automática Industrial, CSIC, 2000-

1. Los fundamentos: de la computación con números a la computación con palabras (y sus significados):
 1. Conjuntos nítidos y predicados nítidos
 2. Conjuntos borrosos y predicados borrosos
2. Computación con palabras:
 1. Variable lingüística
 2. Relaciones
3. Razonando con frases imprecisas
4. Y aplicando el razonamiento:
 1. Software de demostración
 2. Aplicaciones del mundo real



INFORMATION AND CONTROL 8, 338-353 (1965)

Fuzzy Sets*

L. A. ZADEH

*Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory,
University of California, Berkeley, California*

A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership (characteristic) function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one. The notions of inclusion, union, intersection, complement, relation, convexity, etc., are extended to such sets, and various properties of these notions in the context of fuzzy sets are established. In particular, a separation theorem for convex fuzzy sets is proved without requiring that the fuzzy sets be disjoint.

I. INTRODUCTION

More often than not, the classes of objects encountered in the real physical world do not have precisely defined criteria of membership. For example, the class of animals clearly includes dogs, horses, birds, etc. as its members, and clearly excludes such objects as rocks, fluids, plants, etc. However, such objects as starfish, bacteria, etc. have an ambiguous status with respect to the class of animals. The same kind of ambiguity arises in the case of a number such as 10 in relation to the "class" of all real numbers which are much greater than 1.

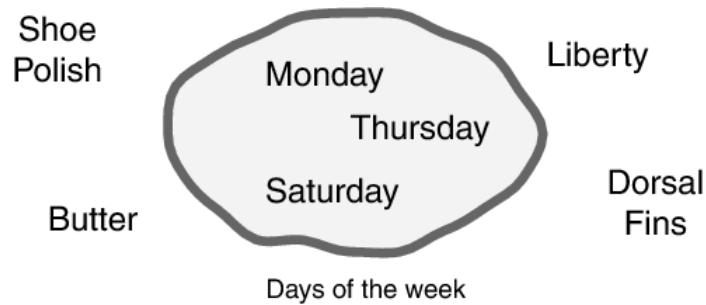
Clearly, the "class of all real numbers which are much greater than 1," or "the class of beautiful women," or "the class of tall men," do not constitute classes or sets in the usual mathematical sense of these terms. Yet, the fact remains that such imprecisely defined "classes" play an important role in human thinking, particularly in the domains of pattern recognition, communication of information, and abstraction.

The purpose of this note is to explore in a preliminary way some of the basic properties and implications of a concept which may be of use in

* This work was supported in part by the Joint Services Electronics Program (U.S. Army, U.S. Navy and U.S. Air Force) under Grant No. AF-AFOSR-139-64 and by the National Science Foundation under Grant GP-2413.

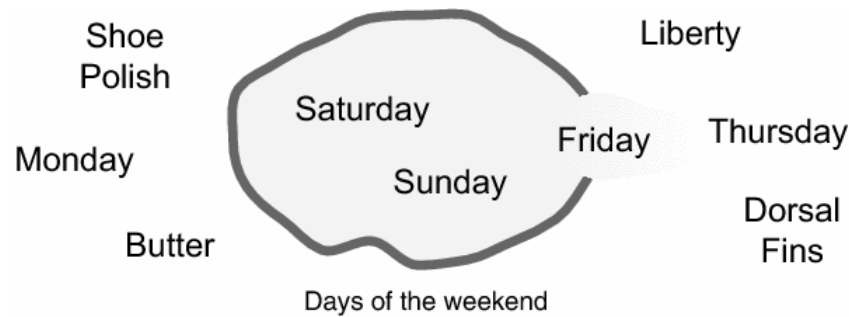
Representación en extensión:

Conjunto nítido:



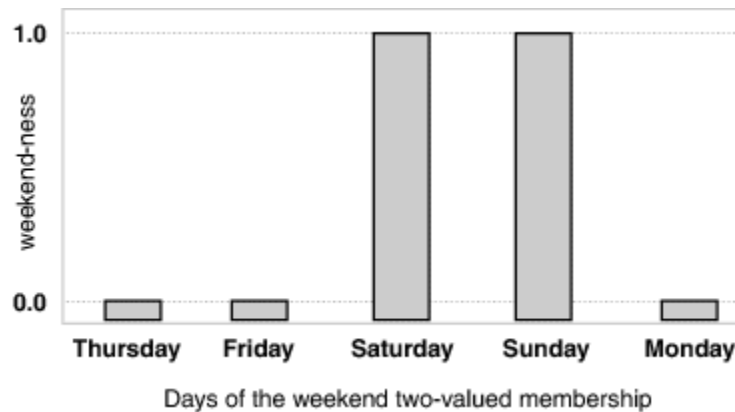
Conjunto

Borroso:

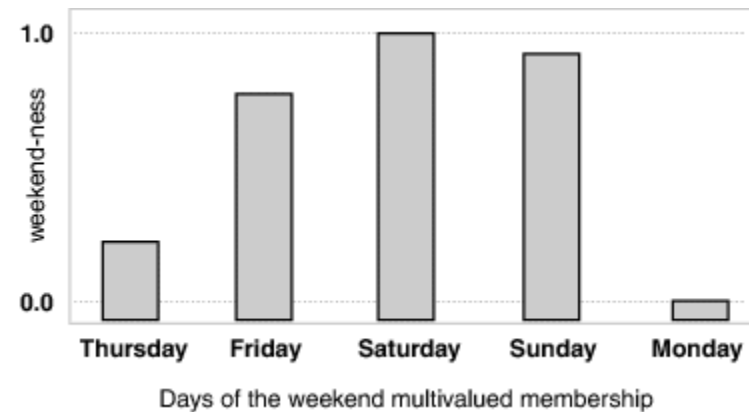


Otra representación: función característica o de pertenencia

Conjunto nítido:

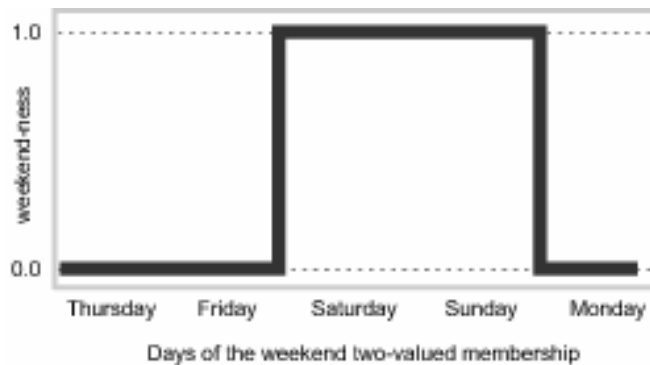


Conjunto Borroso:



Otra representación

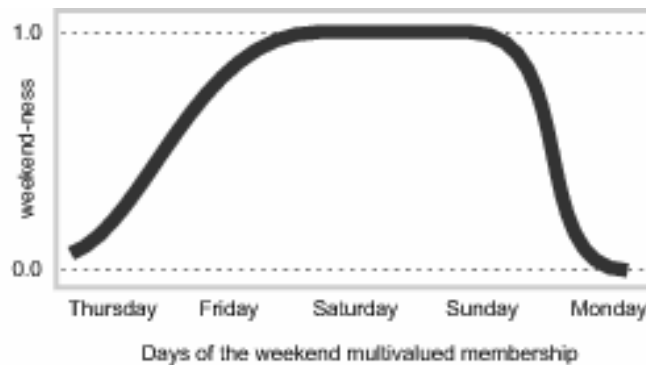
Conjunto nítido:



$$\mu_P : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow u \in P \\ 0 & \Leftrightarrow u \notin P \end{cases}$$

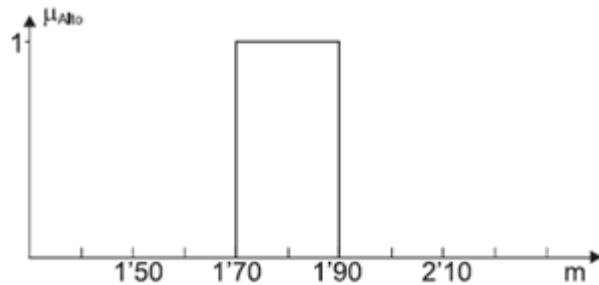
Conjunto Borroso:



$$\mu_P : X \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu_P(x) = \text{????????}$$

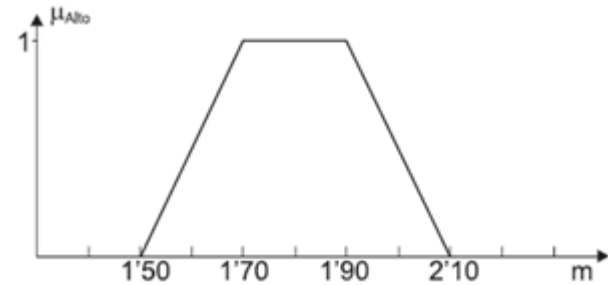
Conjunto nítido:



$$\mu_{ALTO} : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\mu_{ALTO}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 1,70m \\ 1 & \text{si } 1,70m \leq u \leq 1,90m \\ 0 & \text{si } 1,90m < u \end{cases}$$

Conjunto Borroso:



$$\mu_{ALTO} : X \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu_{ALTO}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 1,50m \\ ?? & \text{si } 1,50m \leq u \leq 1,70m \\ 1 & \text{si } 1,70m \leq u \leq 1,90m \\ ?? & \text{si } 1,90m \leq u \leq 2,10m \\ 0 & \text{si } 2,10m < u \end{cases}$$

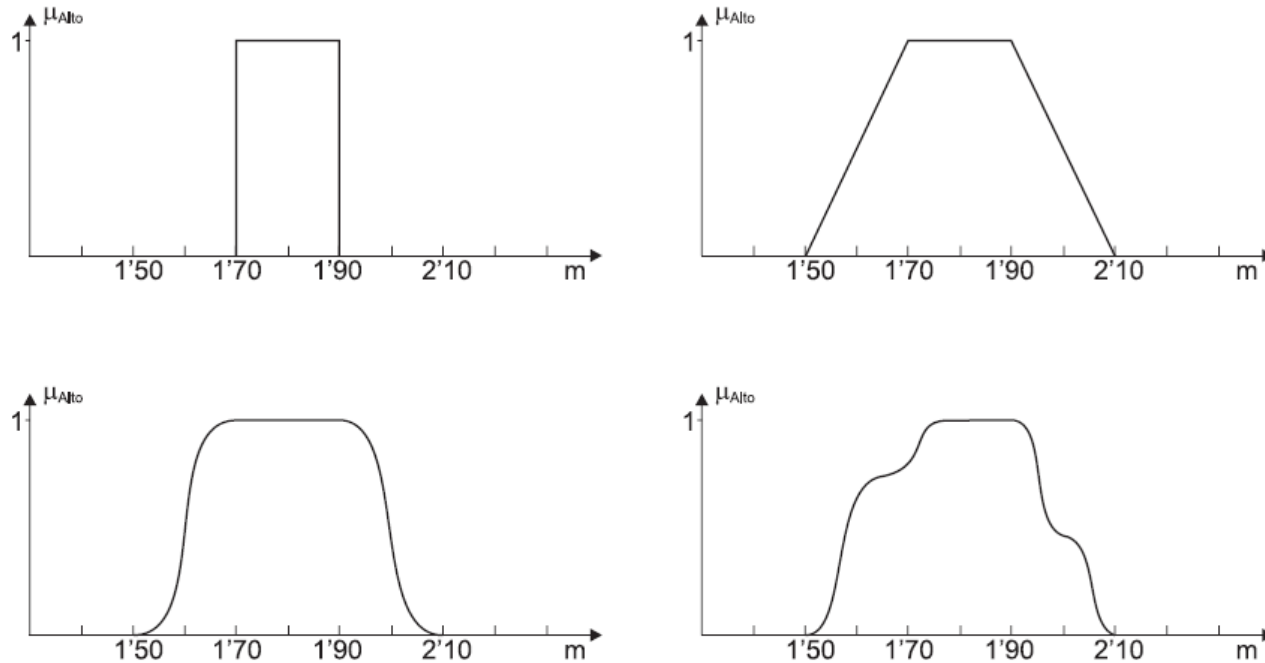
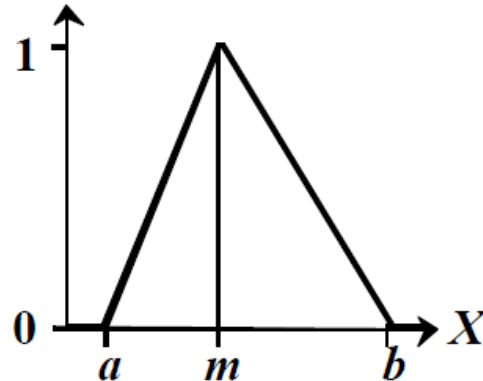


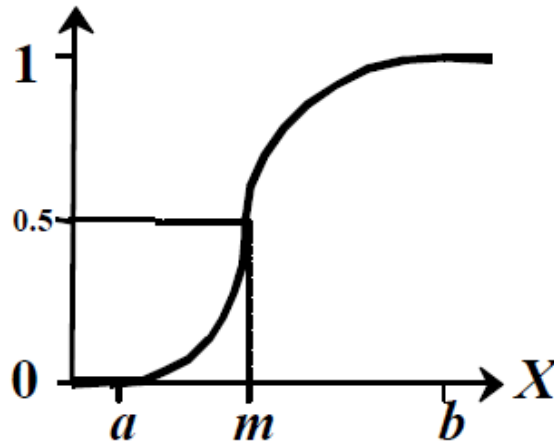
Figura 1.1: Diferentes representaciones de un mismo conjunto borroso, correspondiente al predicado 'alto', donde la primera de ellas coincide con una representación clásica.

Triangular



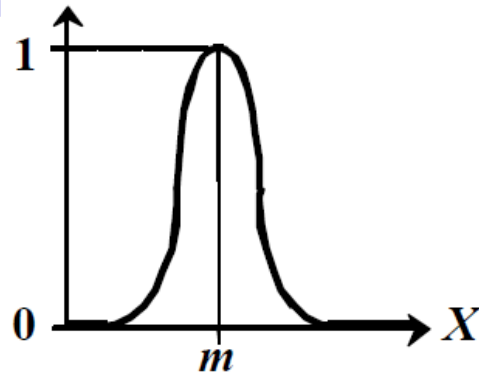
$$\mu_A(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a, m] \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Función S



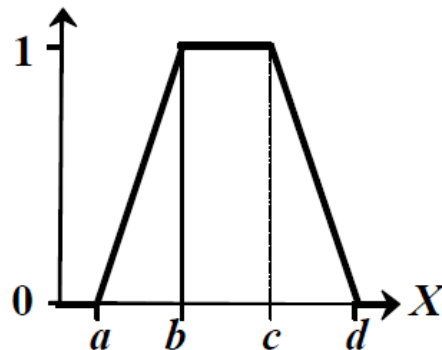
$$\mu_A(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2 \{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (a, m] \\ 1 - 2 \{(x-b)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (m, b) \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Gaussiana



$$\mu_A(x) = e^{-k(x-m)^2}$$

Trapezoidal



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \leq a) \text{ o } (x \geq d) \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } x \in (a, b] \\ 1 & \text{si } x \in (b, c) \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } x \in (c, d) \end{cases}$$

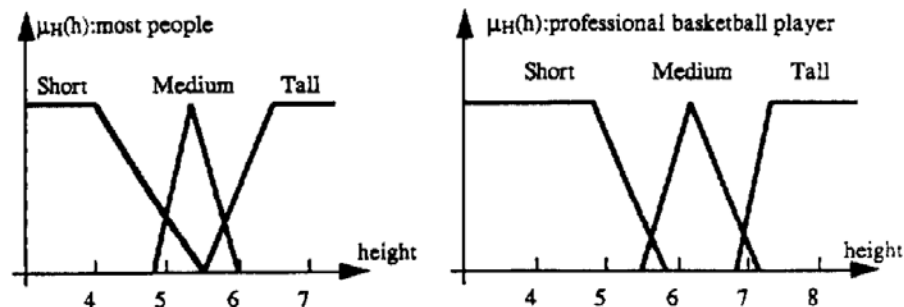
La definición nítida es siempre unívoca:

Ejemplo: números pares temperaturas $>35^{\circ}\text{C}$
 $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ $(35, \infty]$

La definición borrosa es siempre una cuestión de contexto:

- acuerdo (o votación)
- “sentido común”

Ejemplo: números pequeños temperaturas altas
 ¿10? ¿40?



IA: Ciencia, tecnología, ficción ou marketing?

Y tiene una semántica, más allá de la mera noción de pertenencia: $\mu_{ALTO}(x)$

- Similitud a un prototipo: en que medida una estatura x determinada coincide con o se aparta del prototipo de “alto”
- Ordenación de las estaturas x : x_1 es mas/menos alto que x_2
- Teoría de la posibilidad: dado “alto” como restricción (o información disponible), mide el grado de posibilidad de que una estatura x sea alto

Operaciones sobre conjuntos

Referencial U: [1, 50]

A: [1, 20]

B: [15, 50]

$$\overline{A} = \{u \in U : u \notin A\}$$

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

$$\overline{A} : (20, 50]$$

$$A \cap B = \{u \in U : u \in A \text{ y } u \in B\}$$

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

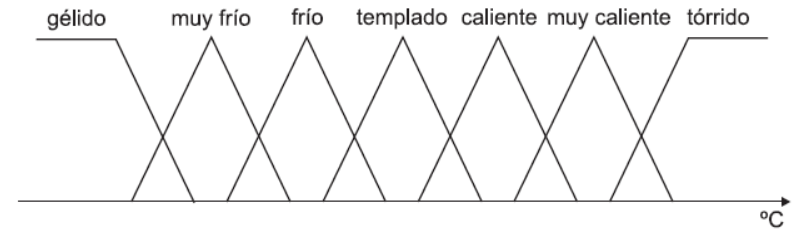
$$A \cap B : [15, 20]$$

$$A \cup B = \{u \in U : u \in A \text{ o } u \in B\}$$

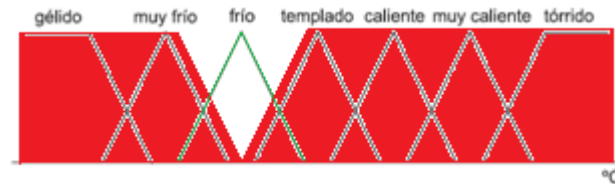
$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

$$A \cup B : [1, 50]$$

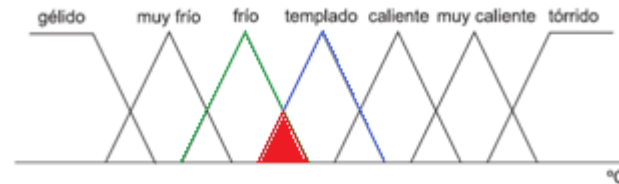
Operaciones sobre conjuntos



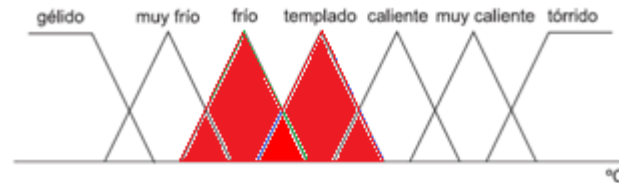
$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$



$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$



$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$



Isomorfismo entre conjuntos y predicados: álgebras de Boole

Tabla 1.1: Propiedades de las álgebras de Boole.

Idempotencia:	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Absorción:	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad:	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Complemento:	$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
De Morgan:	$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Involución:	$\overline{\bar{A}} = A$	

Isomorfía: $x \in \{2,4,6,8,10,\dots\}$ $\Leftrightarrow$ “x es par”
 $\mu_{\text{PAR}}(x)=1$ $\Leftrightarrow$ “x es par” es CIERTO

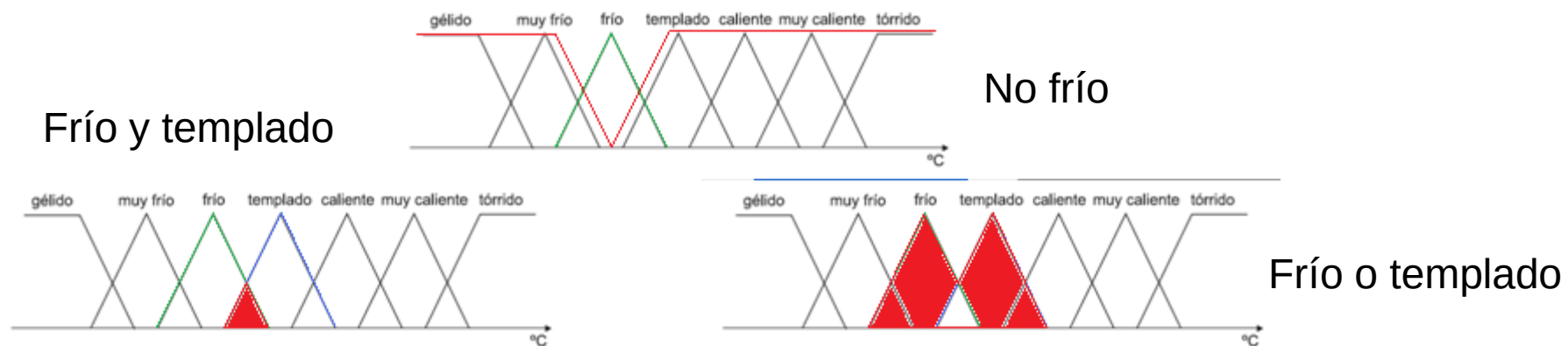
Cálculo de predicados como una aproximación nítida al CWW (y al CWM)

Que incluye los operadores lógicos:

$$\overline{A} = \{u \in U : u \notin A\} \quad \leftrightarrow \text{"x es no A"} \quad \text{NEGACIÓN}$$

$$A \cap B = \{u \in U : u \in A \text{ y } u \in B\} \quad \leftrightarrow \text{"x es A y B"} \quad \text{CONJUNCIÓN}$$

$$A \cup B = \{u \in U : u \in A \text{ o } u \in B\} \quad \leftrightarrow \text{"x es A o B"} \quad \text{DISYUNCIÓN}$$



En el caso borroso...

no hay Álgebra de Boole ☹

pero hay muchos posibles operadores

$$\mu_{\overline{A}}(u) = n(\mu_A(u))$$

$$\mu_{A \cap_T B}(u) = T(\mu_A(u), \mu_B(u))$$

$$\mu_{A \cup_S B}(u) = S(\mu_A(u), \mu_B(u))$$

que pueden definirse a partir de axiomas que establecen su “buen comportamiento”

Tan solo como ejemplo... $n(0) = 1$ y $n(1) = 0$,

$$\forall x, y \in [0, 1], x \leq y \Rightarrow n(x) \geq n(y)$$

p	n(p)
0	1
1	0

$$n(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$n(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \rightarrow n(x) = 1-x$$

También para la...

CONJUNCIÓN

DISYUNCIÓN

t-normas

t-conormas

$$T_Z(x, y) = \min(x, y) \quad S_Z(x, y) = \max(x, y)$$

Zadeh

$$T_G(x, y) = xy \quad S_G(x, y) = x + y - xy$$

Goguen

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \quad S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$$

Lukasiewicz

Proporcionan una semántica diferente:

valores numéricos distintos

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

diferentes propiedades

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Fuzzy Logic = Computing with Words

Lotfi A. Zadeh, *Life Fellow, IEEE*

CW es una metodología en la que la computación se realiza con palabras en lugar de números (Zadeh, 1996)

Variable lingüística (Zadeh, 1975)

5-tupla (V, L, U, G, M)

- | | |
|--|--|
| • V: variable. | Temperatura |
| • $L=\{L_1, \dots, L_n\}$ valores lingüísticos | "Frío", "Poco Templado", "Algo Caliente", ... |
| • U: universo de discurso | $[-30, 250]$ (°C) |
| • G: gramática | Genera los L_i |
| • Términos base o primarios | "Frío", "Templado", "Caliente" |
| • Modificadores de los valores | "Más o menos", "Algo", "Muy", ... |
| • Conectivos lógicos | Y, O, NO |
| • Otros operadores | Antónimo, Intensificación/Difuminación, Mayor que, ... |
| • M: reglas semánticas | Significado de L_i mediante conjuntos borrosos |
| | $M: L \rightarrow P(U)$ |

2. Computación con palabras (CWW)

Ejemplo: la temperatura es alta
 la temperatura es muy caliente o templada

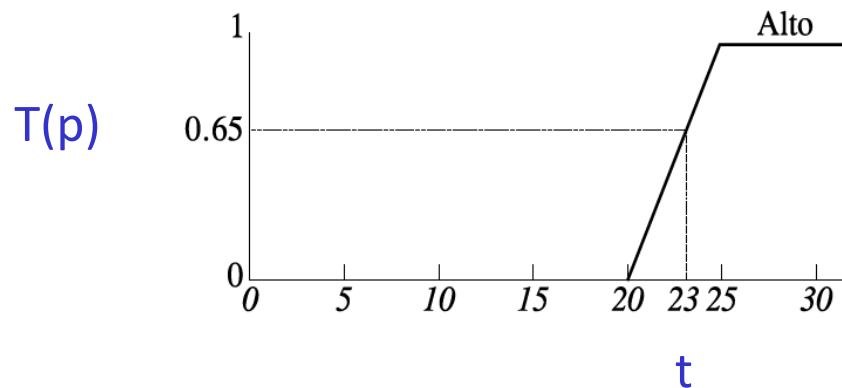
Proposiciones p que derivan de la variable lingüística.

p : X es A con A un valor lingüístico

Su grado de verdad $T(p)$ se evalúa mediante una función de pertenencia:

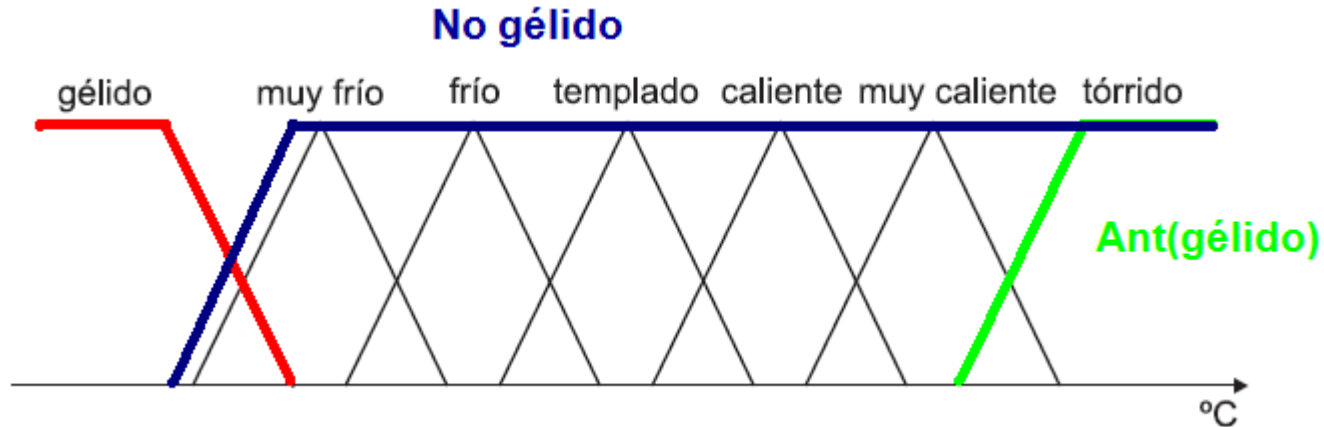
p : “Temperatura es Alta”. ¿Grado de verdad $T(p)$ para una temperatura $t=23$?

$$T(p) = \mu_{ALTO}(t)$$



2. Computación con palabras (CWW)

¿Los antónimos, por ejemplo?



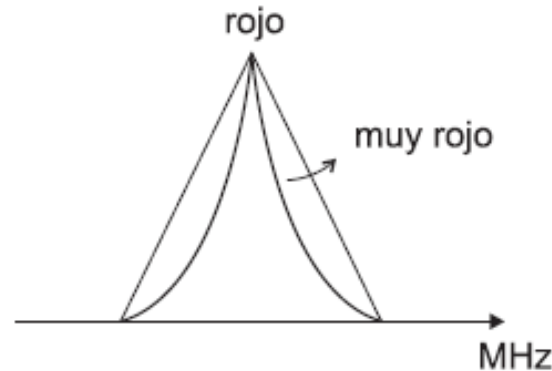
$$\text{En } U = [a, b], \quad (\mu_{ANT} \circ \mu_L)(u) = \mu_L(b + a - u)$$

2. Computación con palabras (CWW)

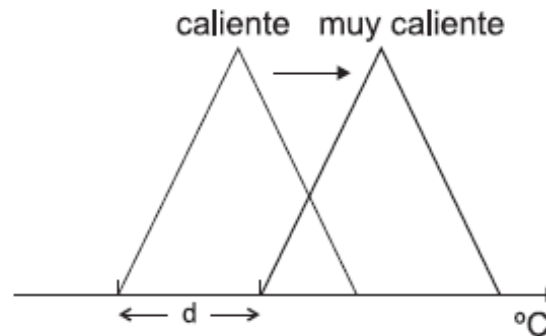
¿Los modificadores, por ejemplo?

MUY: intensificador/especificidad

$$(\mu_{MUY} \circ \mu_L)(u) = \mu_L(u)^2$$



$$(\mu_{MUY} \circ \mu_L)(u) = \mu_L(u - d)$$



ALGO: intensificador

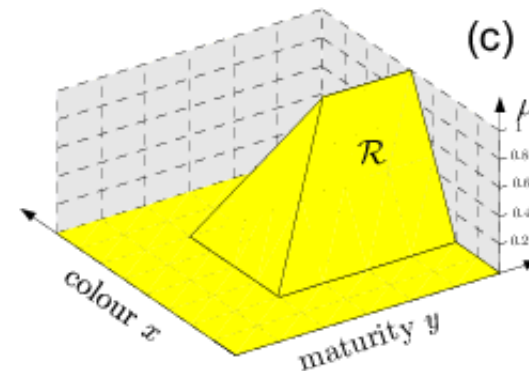
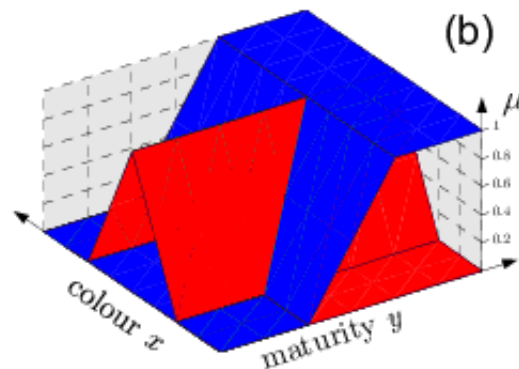
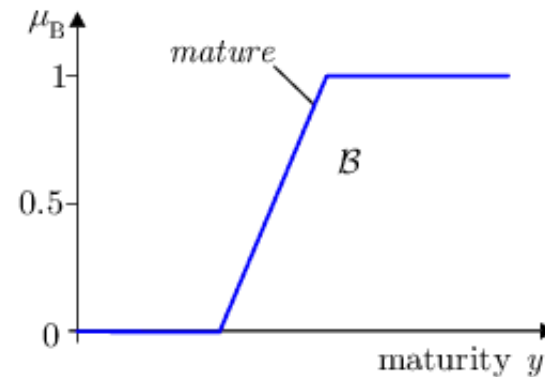
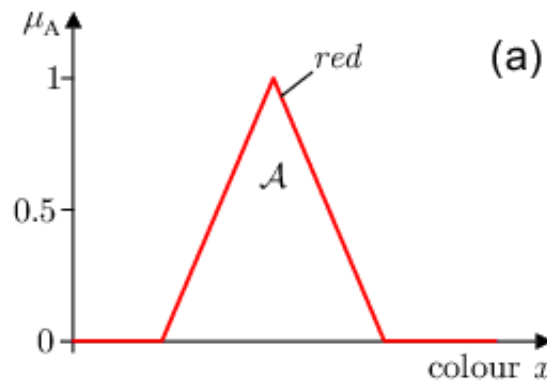
$$(\mu_{ALGO} \circ \mu_L)(u) = \sqrt{\mu_L(u)}$$

$$(\mu_{ALGO} \circ \mu_L)(u) = \mu_L(u + d)$$

2. Computación con palabras (CWW)

Hasta ahora, en un único universo de discurso, pero pueden establecerse relaciones, que ligan dos o más universos.

Ejemplo: p: "tomate está rojo y maduro" $\mu(c, m) = \min(\mu_{ROJO}(c), \mu_{MADURO}(m))$



2. Computación con palabras (CWW)

Una relación borrosa es un conjunto borroso definido en el espacio producto cartesiano de los respectivos universos.

Para cada tupla (par), la pertenencia indica el grado en que se cumple la relación.

Las relaciones pueden componerse, mediante la “regla composicional”:

Ejemplo: R: relación **color**-madurez

S: relación **madurez**-sabor

T: ¿relación **color**-sabor?

R	verde	normal	maduro
verde	1	0.5	0
Amarillo	0.3	1	0.4
rojo	0	0.2	1

T	amargo	insípido	dulce
verde	??	??	??
Amarillo	??	??	??
rojo	??	??	??

S	amargo	insípido	dulce
Verde	1	0.2	0
Normal	0.7	1	0.3
maduro	0	0.7	1

2. Computación con palabras (CWW)

La regla composicional permite calcular nuevas relaciones a partir de otras:

$R(\text{color}, \text{madurez})$

$S(\text{madurez}, \text{sabor})$

$T(\text{color}, \text{sabor})$

$$T = R \circ S$$

$$\mu_T(\text{color}, \text{sabor}) = \sup_{\text{madurez}} \min(\mu_R(\text{color}, \text{madurez}), \mu_S(\text{madurez}, \text{sabor}))$$

R	verde	normal	maduro
verde	1	0.5	0
Amarillo	0.3	1	0.4
rojo	0	0.2	1

S	amargo	insípido	dulce
Verde	1	0.2	0
Normal	0.7	1	0.3
maduro	0	0.7	1

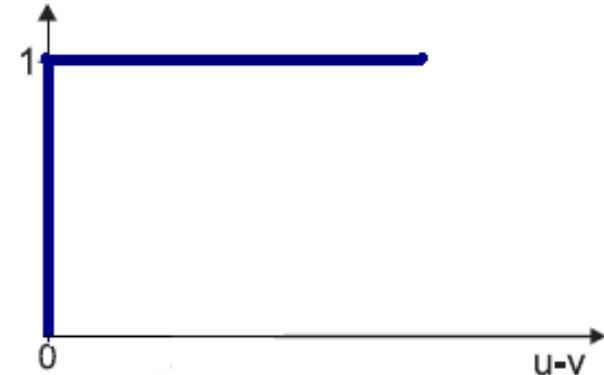
T	amargo	insípido	dulce
verde	1	0.5	0.3
Amarillo	0.7	1	0.4
rojo	0.2	0.7	1

2. Computación con palabras (CWW)

La regla composicional permite calcular nuevos términos a partir de relaciones y términos:

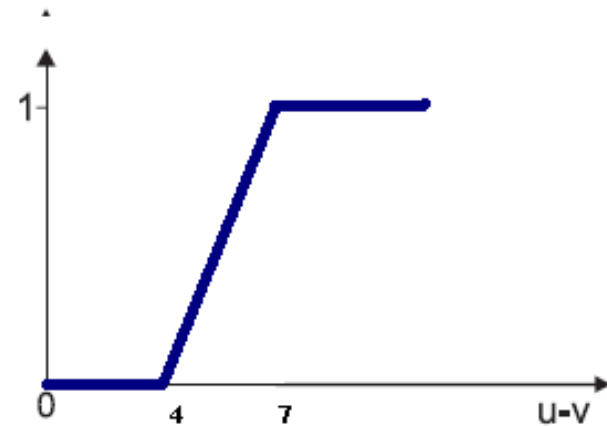
- Relación: “mayor que” (en $[0, 10] \times [0, 10]$)

$$\mu_{>}(u, v)$$

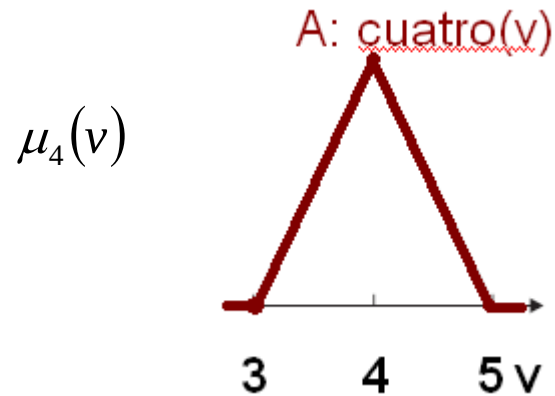


- Relación: “mucho mayor que” (en $[0, 10]$)

$$\mu_{>>}(u, v)$$



Término: “cuatro”



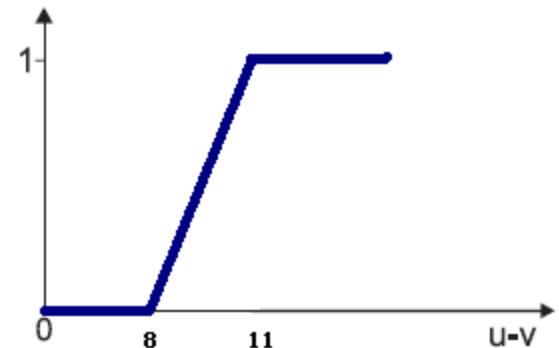
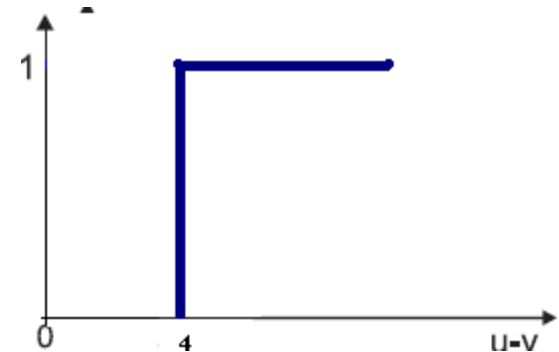
Nuevos términos:

“mayor que cuatro”

$$\mu_{>4}(u) = \sup_v \min(\mu_{>}(u, v), \mu_4(v))$$

“mucho mayor que cuatro”

$$\mu_{>>4}(u) = \sup_v \min(\mu_{>>}(u, v), \mu_4(v))$$



Ampliando la expresividad...

cuantificación lingüística: incluyendo proposiciones cuantificadas
incrementamos notablemente la expresividad de las reglas

Ejemplo: Si la mayoría de temperaturas fueron altas ENTONCES ...

Si la temperatura fue alta en la última media hora ENTONCES...

Si la presión subió bastante poco después de una bajada de temperatura...

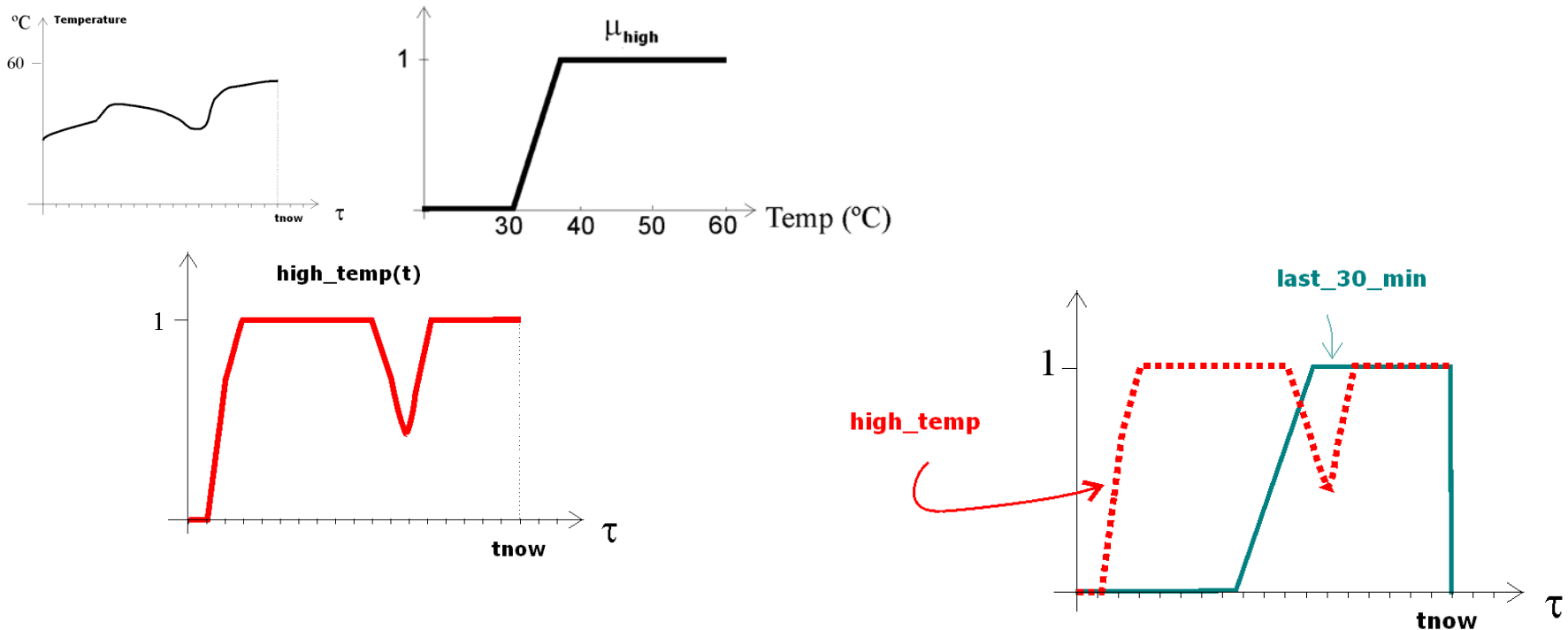
Papel central de las relaciones y los operadores de cuantificación

2. Computación con palabras (CWW)

Necesidad de considerar la ocurrencia de los eventos en una ventana:

- Espacial
- Temporal

Y evaluar el grado de cumplimiento en ella

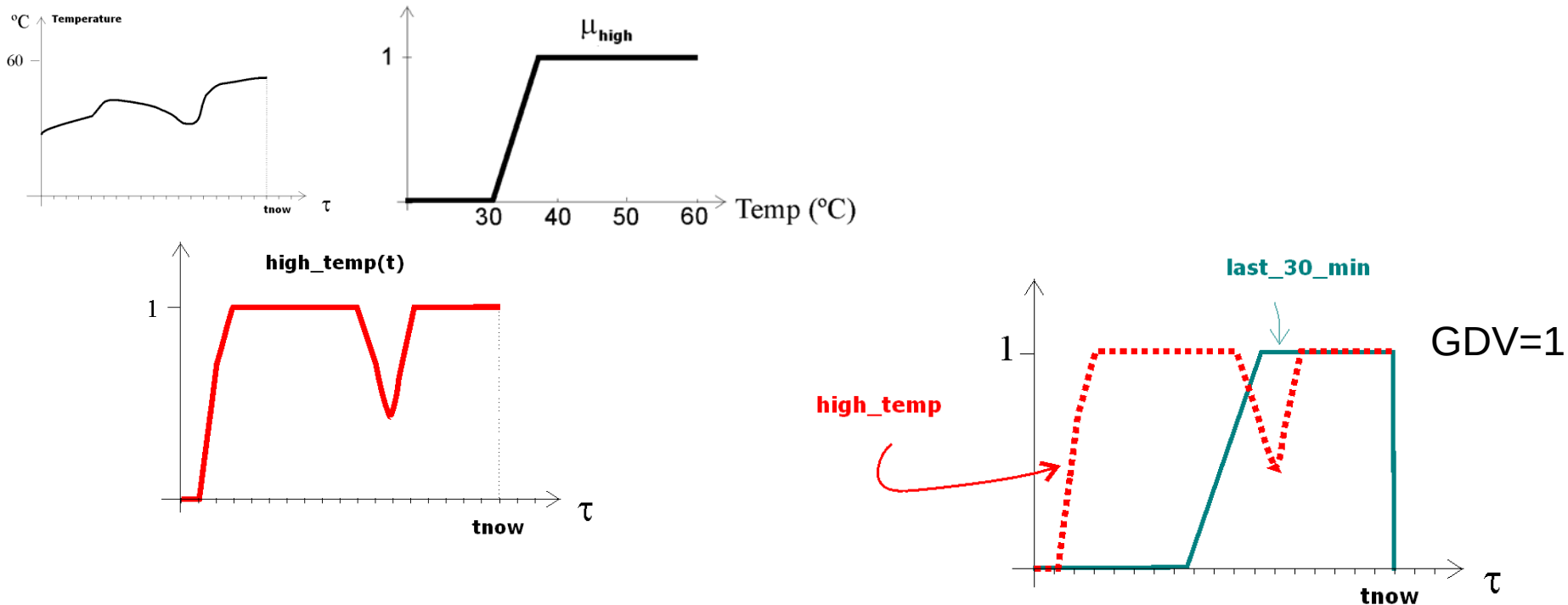


2. Computación con palabras (CWW)

Necesidad de considerar la ocurrencia de los eventos en una ventana:

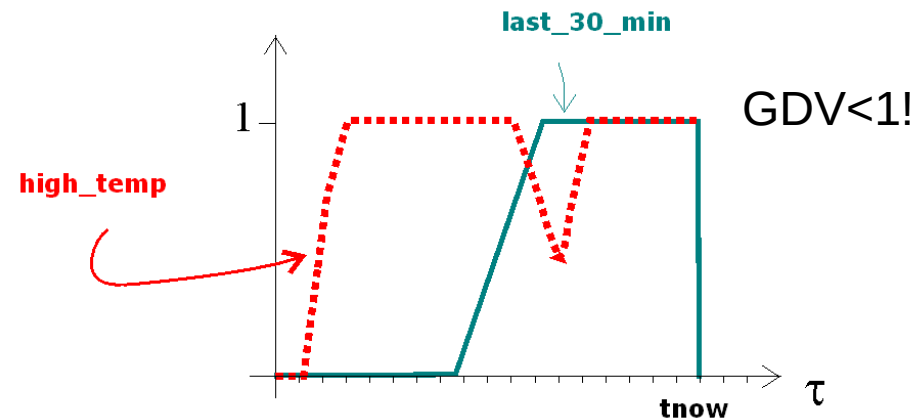
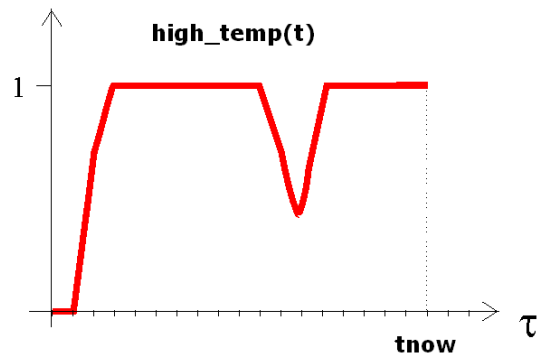
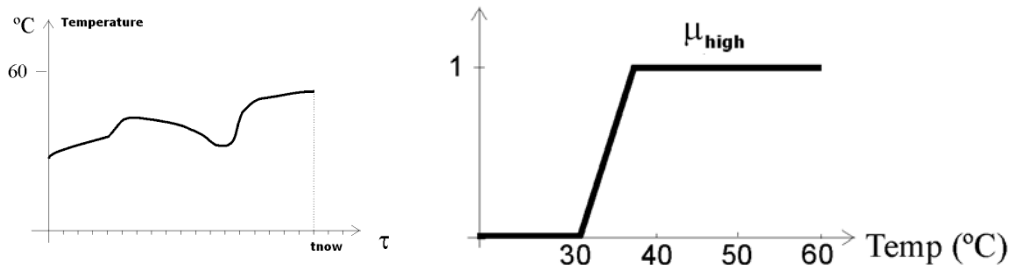
- Espacial
- Temporal

Y evaluar el grado de cumplimiento en ella



2. Computación con palabras (CWW)

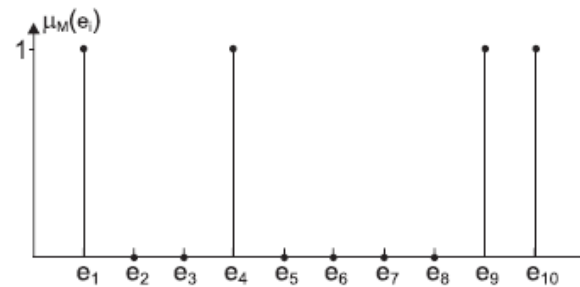
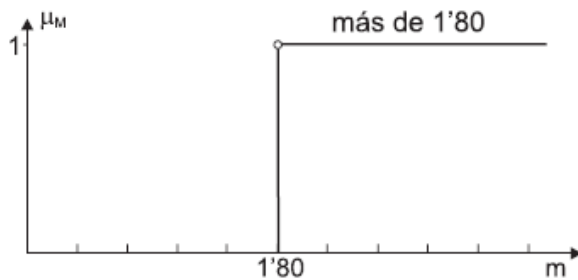
La temperatura fue alta durante toda la última media hora



2. Computación con palabras (CWW)

Hacen falta modelos de cuantificación, como el de Zadeh.

Caso 1: “aproximadamente cinco personas miden mas de 1,80m”

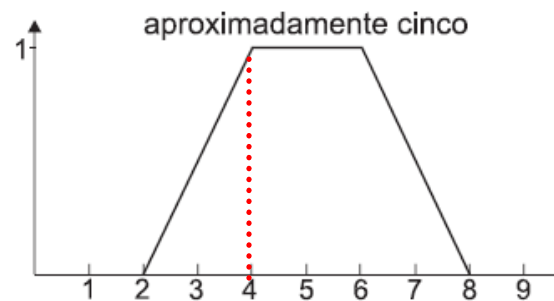


$$card_E(A) = 4$$

Modelo de Zadeh

$$(\text{absoluto}) \quad card_E(A) = \sum_{e \in E} \mu_A(e)$$

$$\mu_Q(card_E(A)) = 1$$



2. Computación con palabras (CWW)

Hacen falta modelos de cuantificación, como el de Zadeh.

Caso 2: “la gran mayoría del congreso aprobó la moción”

Congresistas a favor: $\text{card}_E(A) = 252$

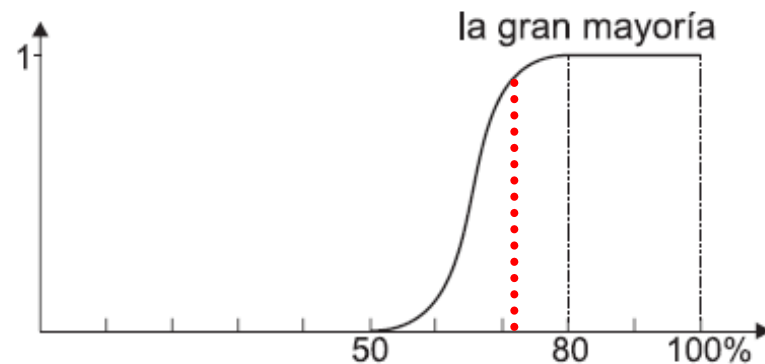
Número congresistas: $|E| = 350$

$$\mu_Q(\text{card}_E(A)) = \mu_Q\left(\frac{252}{350}\right) = \mu_Q(0,72) = 0,86$$

Modelo de Zadeh

$$(\text{relativo}) \text{ card}_E(A) = \frac{\sum_{e \in E} \mu_A(e)}{|E|}$$

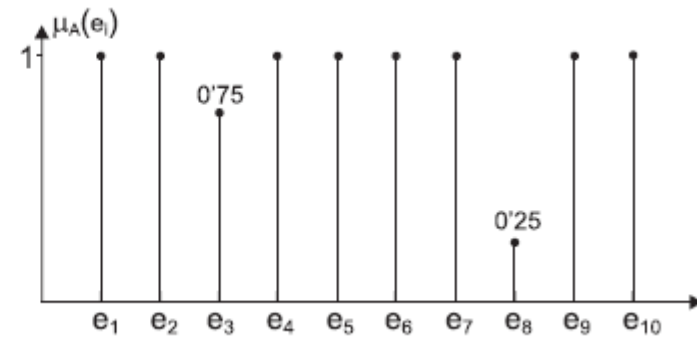
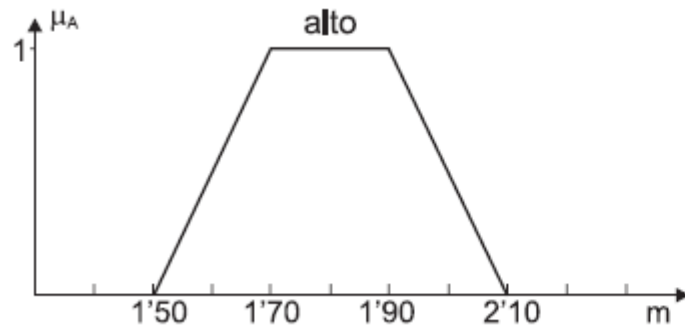
$$\mu_Q(\text{card}_E(A)) = 0,86$$



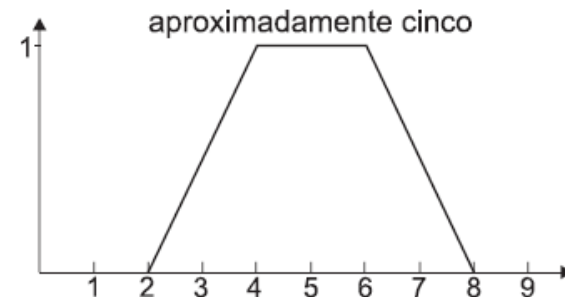
2. Computación con palabras (CWW)

Hacen falta modelos de cuantificación, como el de Zadeh.

Caso 3: “aproximadamente cinco personas son altas”



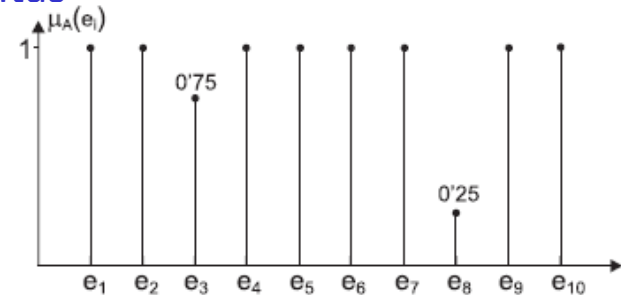
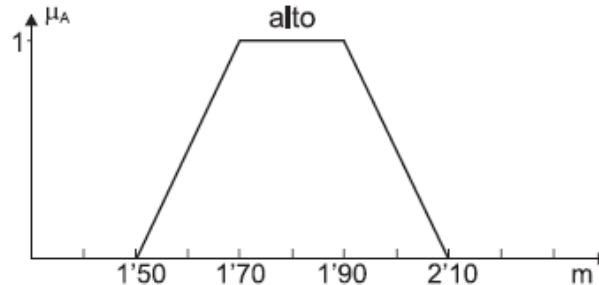
$$\mu_Q(\text{card}_E(A)) = ??$$



2. Computación con palabras (CWW)

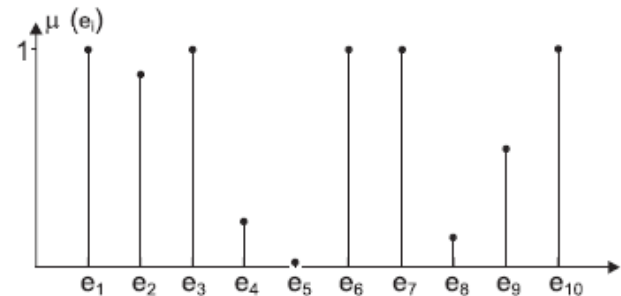
Hacen falta modelos de cuantificación, como el de Zadeh.

Caso 4: “una gran mayoría de personas jóvenes son altas”



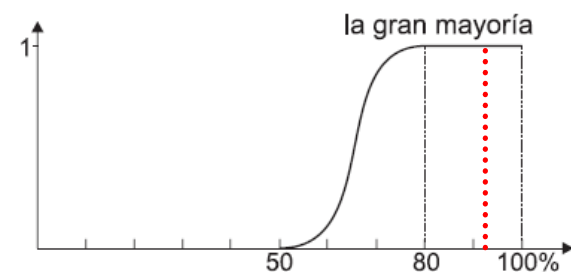
$$\mu_J = 1/e_1 + 0,9/e_2 + 1/e_3 + 0,3/e_4 + 0/e_5 + \dots$$

$$\dots + 1/e_6 + 1/e_7 + 0,1/e_8 + 0,6/e_9 + 1/e_{10}$$



$$card_E(A/J) = \frac{\sum_{e \in E} T(\mu_A(e), \mu_J(e))}{\sum_{e \in E} \mu_J(e)}$$

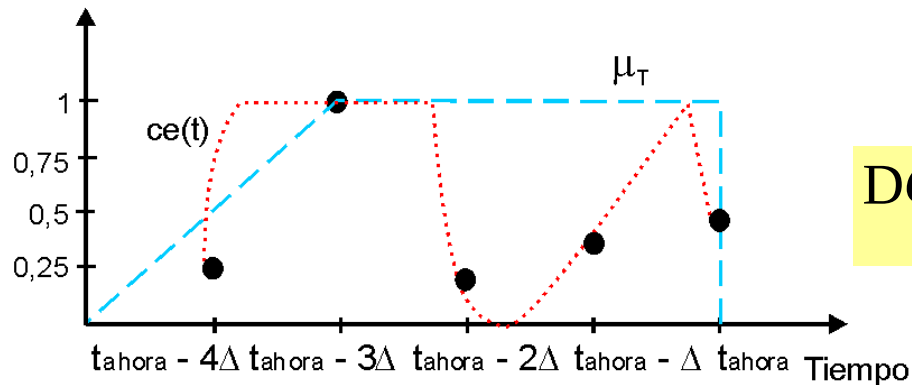
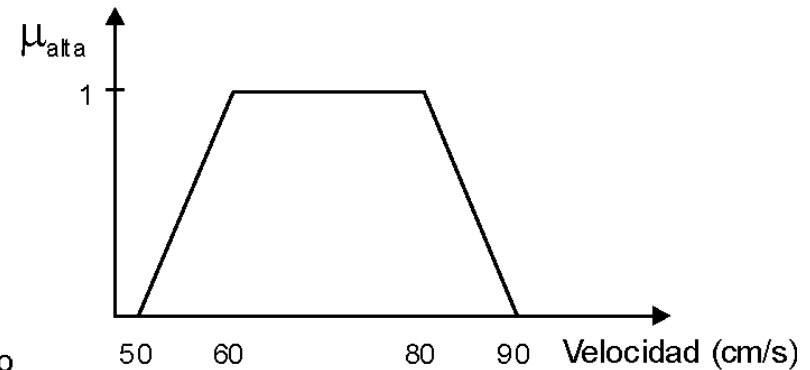
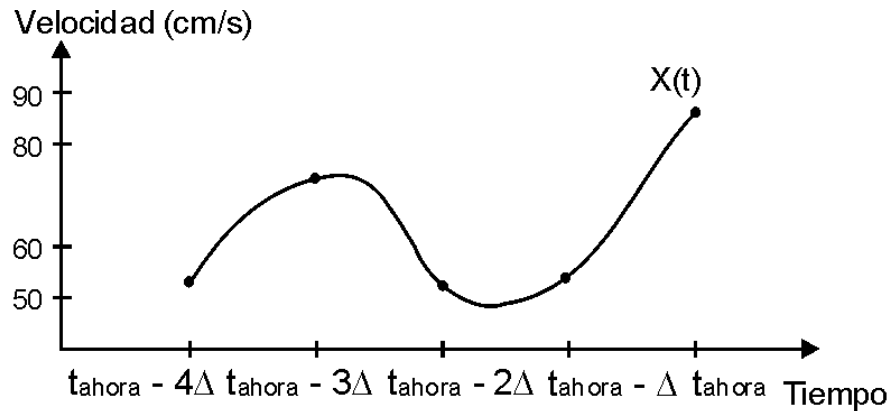
$$\mu_Q\left(\frac{6,65}{6,9}\right) = \mu_Q(0,9638) = 1$$



IA: Ciencia, tecnología, ficción ou marketing?

2. Computación con palabras (CWW)

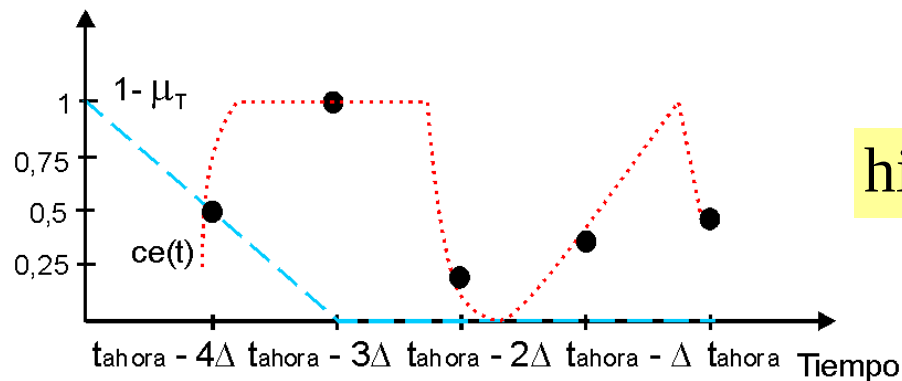
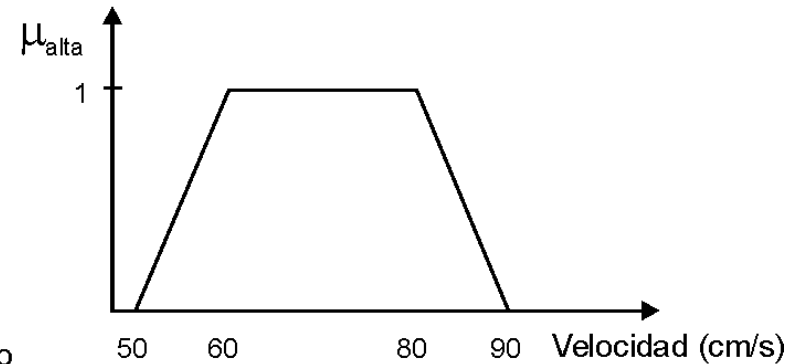
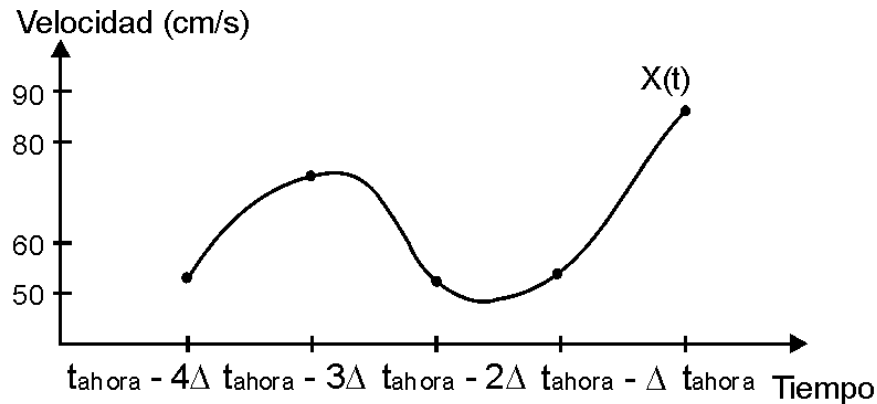
Caso 5: “la velocidad fue alta en los últimos tres segundos”



$$DOF = \bigvee_t \text{high_vel}(t) \wedge \text{last_3_secs}(t) = 1$$

2. Computación con palabras (CWW)

Caso 6: “la velocidad fue alta durante los últimos tres segundos”



$$\text{high_vel}(t) \vee (1 - \text{last_3_secs}(t))$$

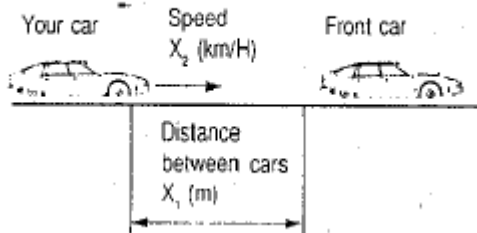
Un uso importantísimo de las relaciones es en la representación de las sentencias condicionales borrosas, fundamentales para el razonamiento

Ejemplo:

R: SI LA TEMPERATURA ES ALTA, EL VOLUMEN ES GRANDE

$$\mu_R(t, v)$$

Fig. 6 Hypothetical Case of Driving



Rule 1: If the distance between two cars is short and the car speed is high, then brake hard for substantial speed reduction.

Rule 2: If the distance between two cars is moderately long and the car speed is high, brake moderately hard (under the condition that the front car is moving at a constant speed).



Hay diversos modelos para R (tema abierto):

$$\mu_R(t, v) = I(\mu_A(t), \mu_G(v))$$

- Condicional material:

$$I(a, b) = S(n(a), b)$$

- Residuación:

$$I(a, b) = \sup\{c \in [0, 1] \mid T(a, c) \leq b\}$$

- QL-implicación:

$$I(a, b) = S(n(a), T(a, b))$$

- Mamdani:

$$I(a, b) = \min(a, b)$$

Tabla 1.2: Algunas implicaciones multivaluadas

Nombre	Forma	Tipo	Propiedades
Kleene-Dienes	$\max(1 - a, b)$	S-implicación ($S = \max$)	I1-I8, I11-I12
		QL-implicación ($S = \min(1, a + b)$)	
Reichenbach	$1 - a + ab$	S-implicación ($S = a + b - ab$)	I1-I8, I11-I12
Łukasiewicz	$\min(1, 1 - a + b)$	S-implicación ($S = \min(1, a + b)$)	I1-I12
		R-implicación ($T = \max(0, a + b - 1)$)	
Gödel	1 si $a \leq b$ b si $a > b$	R-implicación ($T = \min$)	I1-I10
Goguen	1 si $a = 0$	R-implicación ($T = \text{producto}$)	I1-I10, I12
	$\max(1, b/a)$ si $a \neq 0$		
Zadeh	$\max(1 - a, \min(a, b))$	QL-implicación ($S = \max$)	I1, I3, I6, I12

- Razonamiento borroso: regla composicional de inferencia
 - Observación: X es A'
 - Regla: SI X es A ENTONCES Y es B

CONDICIÓN:	Si X es A	entonces	Y es B
OBSERVACIÓN:	X es A'		
			Y es B'

$$B' = A' \circ R$$

$$\mu_{B'}(v) = \sup_u \min(I(\mu_A(u), \mu_B(v)), \mu_{A'}(u))$$

“modus ponens generalizado”

- Generalización del “modus ponens” clásico

CONDICIÓN:	Si X es A	entonces	Y es B
OBSERVACIÓN:	X es A		
CONCLUSIÓN:			Y es B

Donde solo se obtienen conclusiones cuando el antecedente de la regla y el valor observado coinciden

- Ejemplo gráfico, usando el condicional de Mamdani

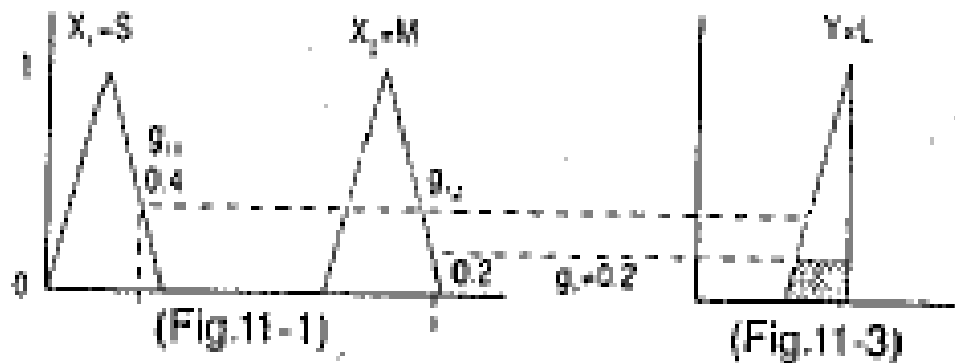
$$I(a, b) = \min(a, b)$$

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(v) &= \sup_u \min(\min(\mu_A(u), \mu_B(v)), \mu_{A'}(u)) \\ &= \min\left(\mu_B(v), \sup_u \min(\mu_A(u), \mu_{A'}(u))\right) \end{aligned}$$

- Si, como es el caso, la entrada A' es un valor numérico (“singleton”)

$$\mu_{A'}(u) = \begin{cases} 1 & u = u_0 \\ 0 & u \neq u_0 \end{cases}$$

Rule 1: If $X_1 = S$ and $X_2 = M$, then $Y = L$.

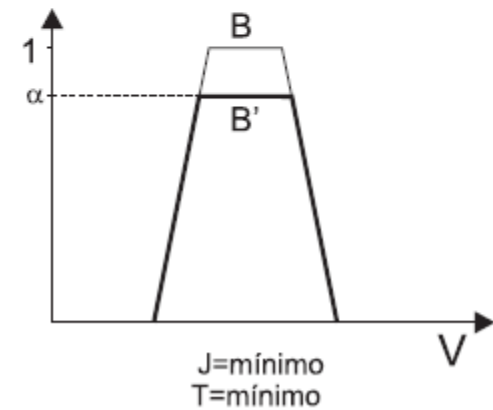
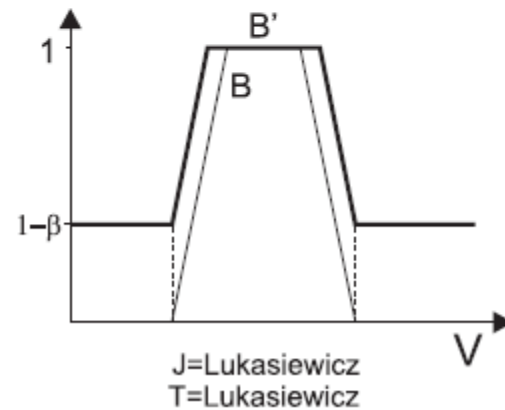
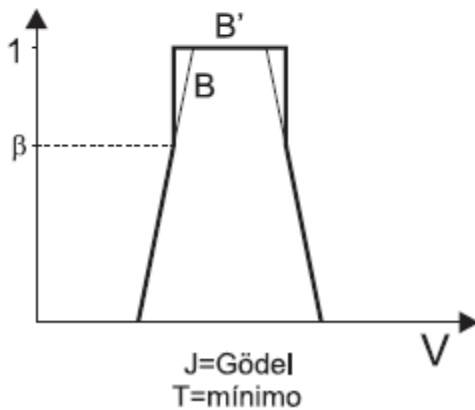
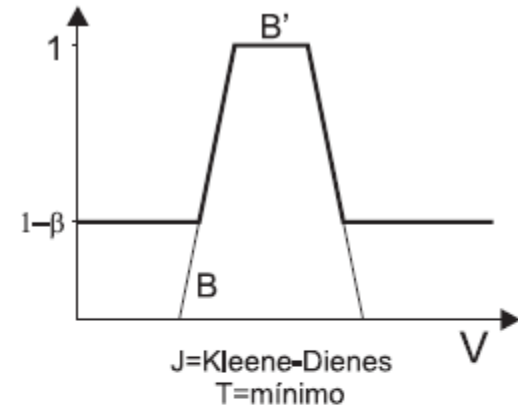
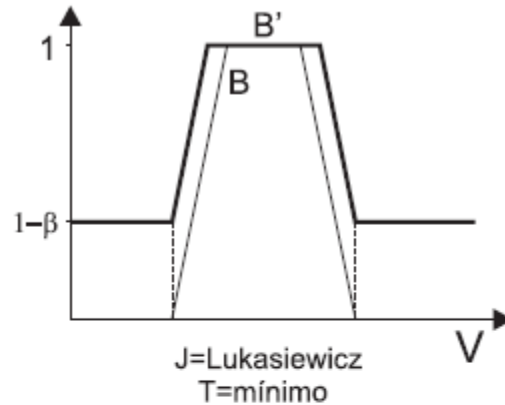
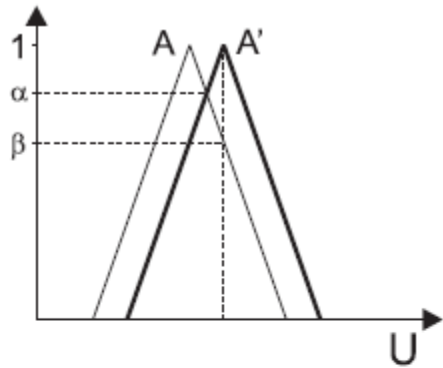


3. Razonando

- Si la entrada A' es un valor lingüístico

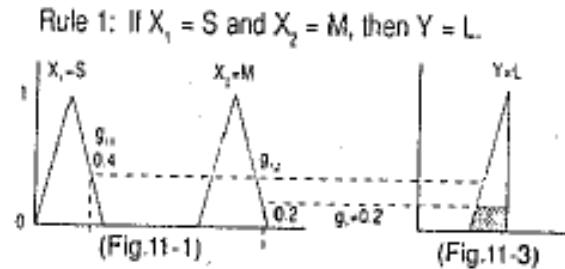


- Otros condicionales dan resultados distintos

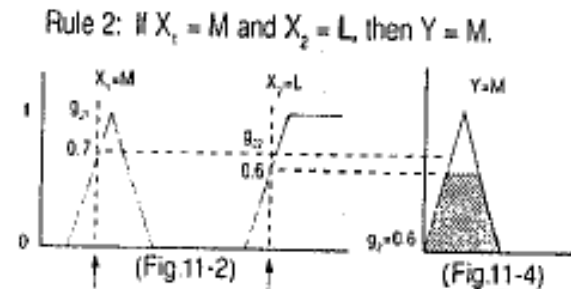


- Si hay mas de una regla es necesario agregar los resultados del consecuente

R1



R2

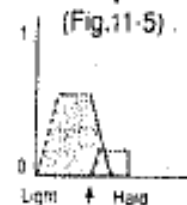


observación



Distance between cars
 $X_1 = 30m$

Speed
 $X_2 = 40km/H$



Brake moderately harder than medium level.

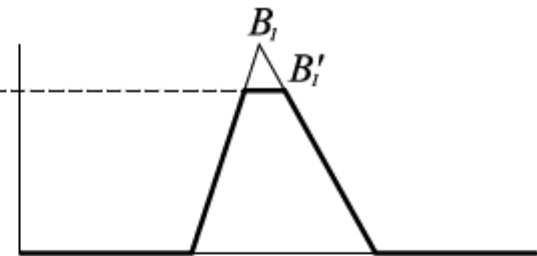
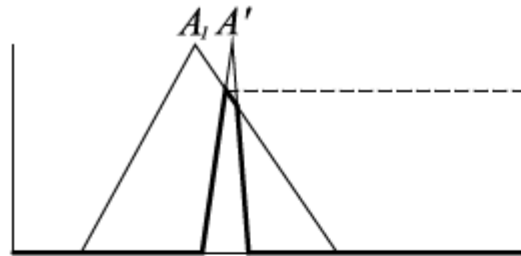


3. Razonando

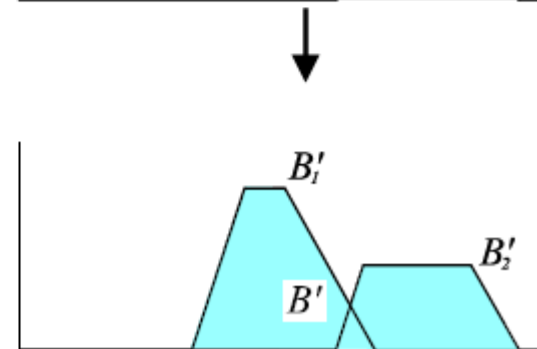
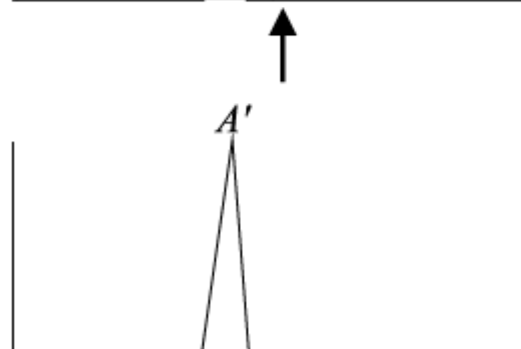
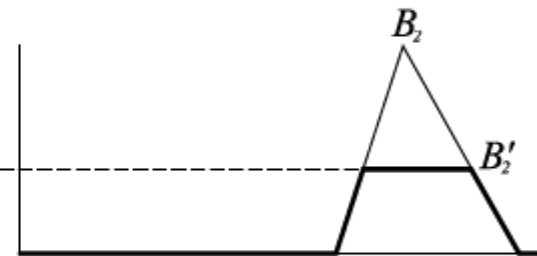
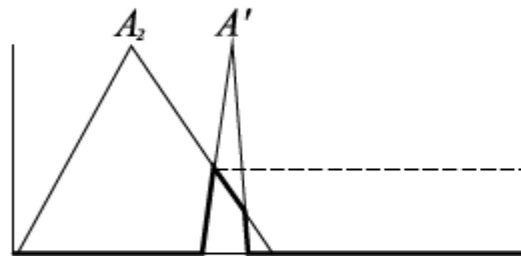
- Si hay mas de una regla es necesario agregar los resultados del consecuente

$$B' = \bigcup_{n=1}^N (A'_n \circ R_n)$$

R1



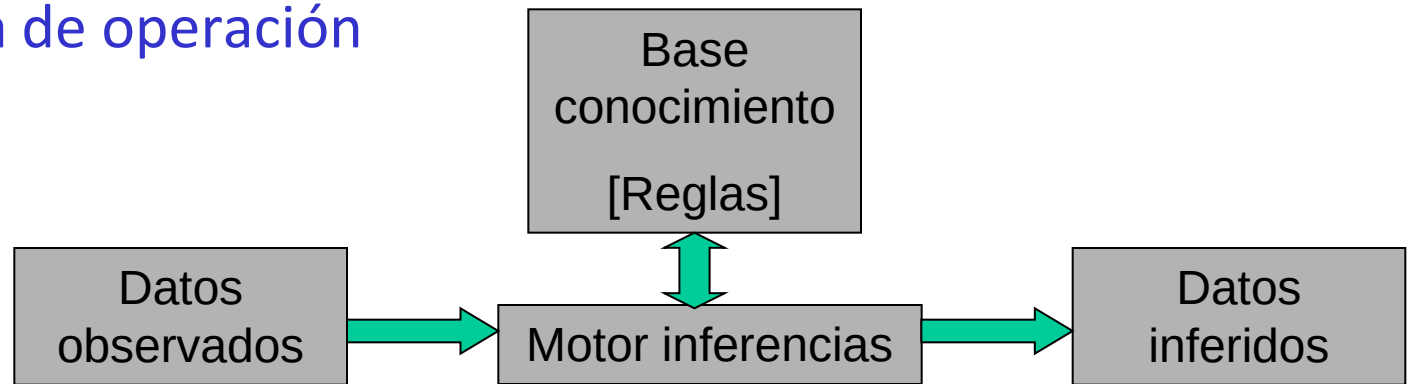
R2



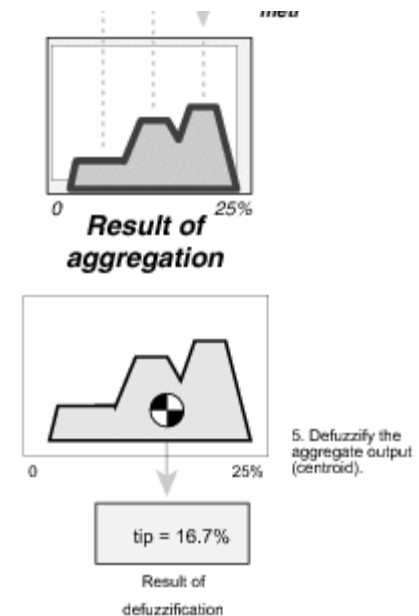
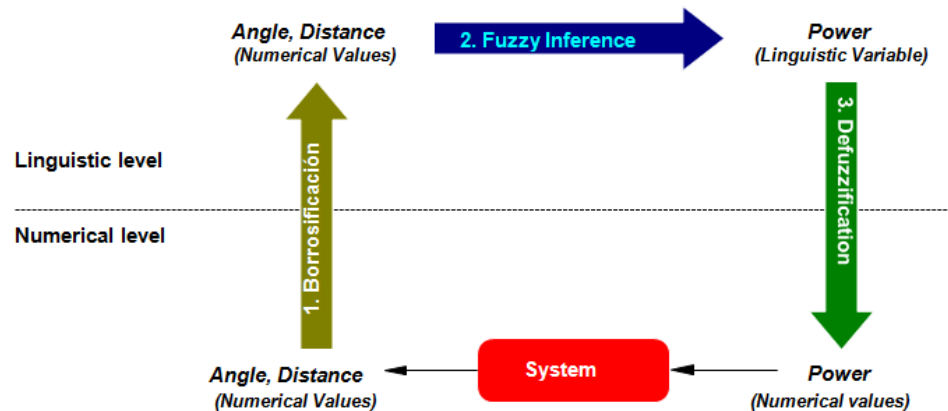
observación

inferencia

- Diseño de un sistema basado en conocimiento borroso:
 - Definición de particiones
 - Selección de operadores: Y, O, NO, AGREGACIÓN, CONDICIONAL
 - Número de antecedentes
 - Número de reglas
- Tarea de extracción de conocimiento
 - Facilitado por expertos
 - Inducción a partir de conjuntos de datos de ejemplo
- Arquitectura de operación

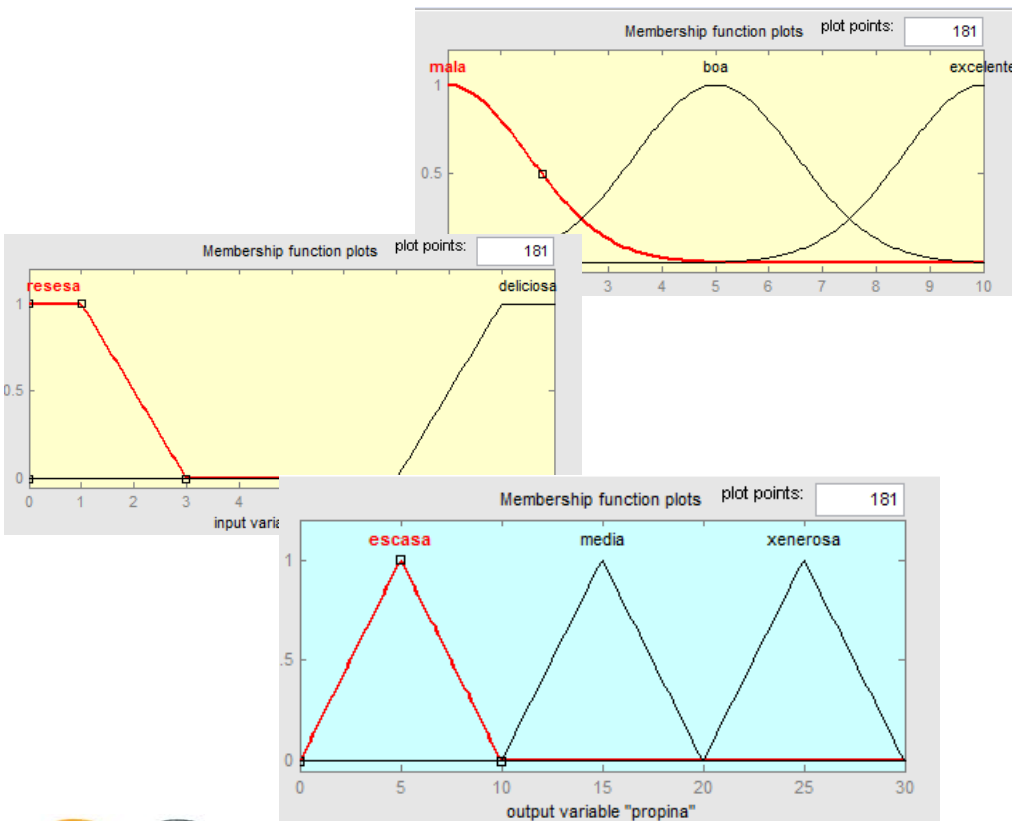


- Si la salida debe ser numérica es necesaria una última etapa: desborrosificación
 - Caso de los sistemas de control

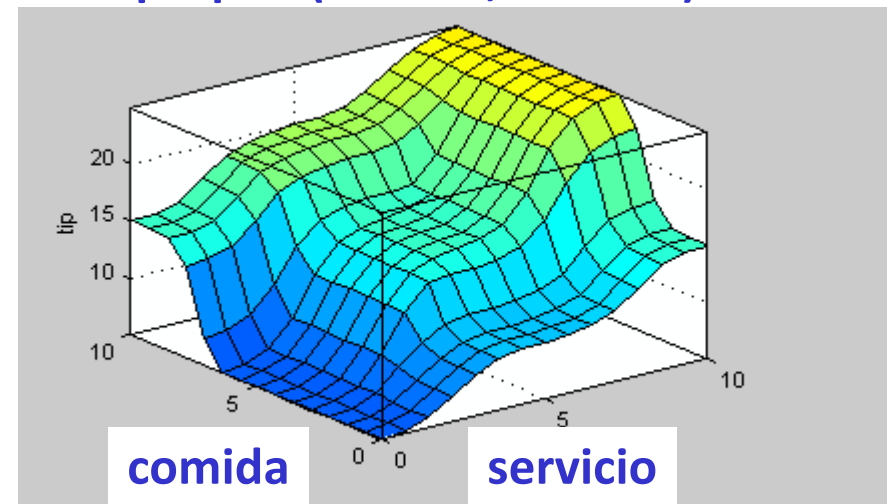


3. Razonando

- R1: servicio es malo → propina escasa
R2: comida está pasada → propina escasa
R3: servicio es bueno → propina media
R4: Servicio es excelente → propina generosa
R5: Comida es buena → propina generosa



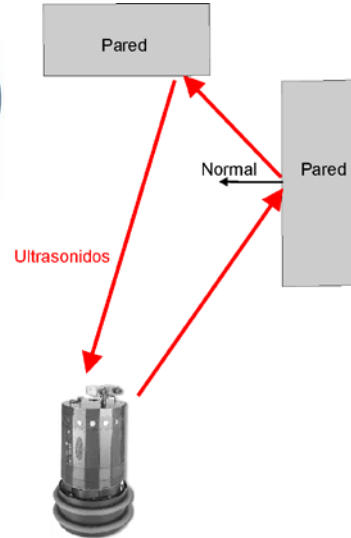
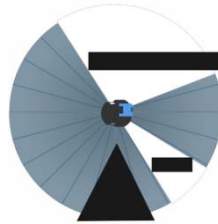
propina(comida, servicio)



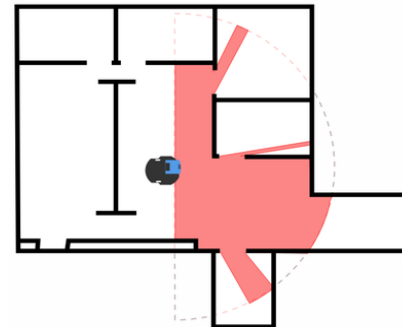
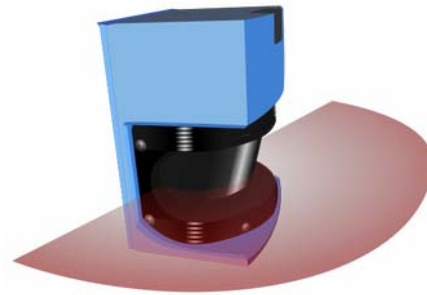
IA: Ciencia, tecnología, ficción ou marketing?

4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

- Sistemas de control en robótica móvil
 - Fuentes de incertidumbre sensorial
 - Ultrasonidos

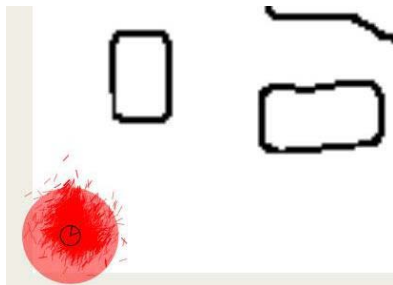


- Láser



4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

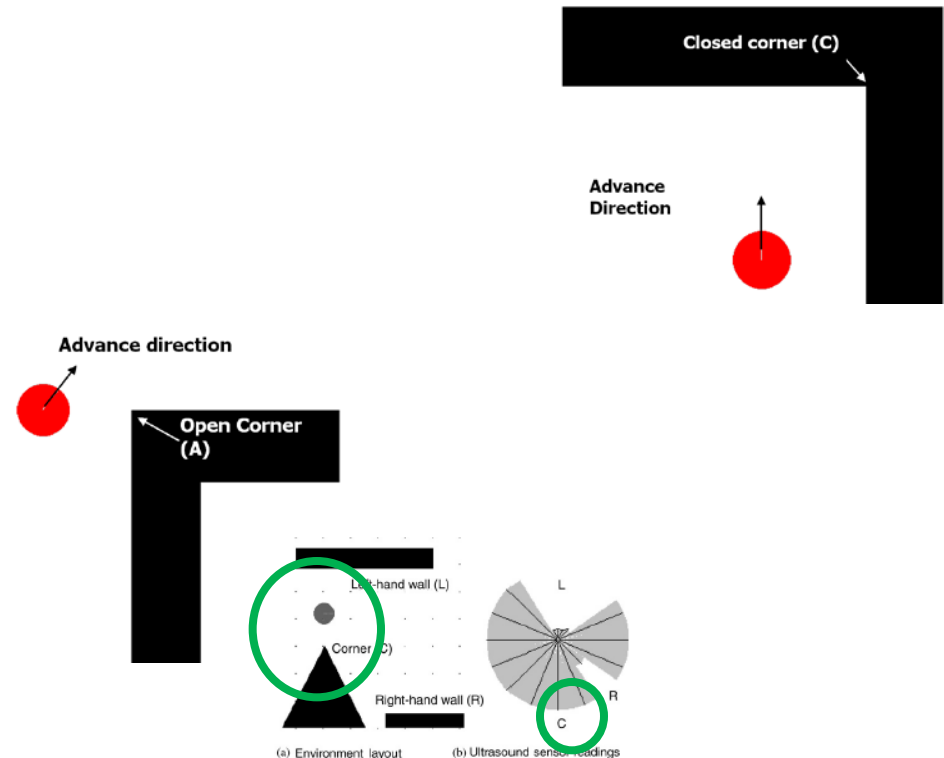
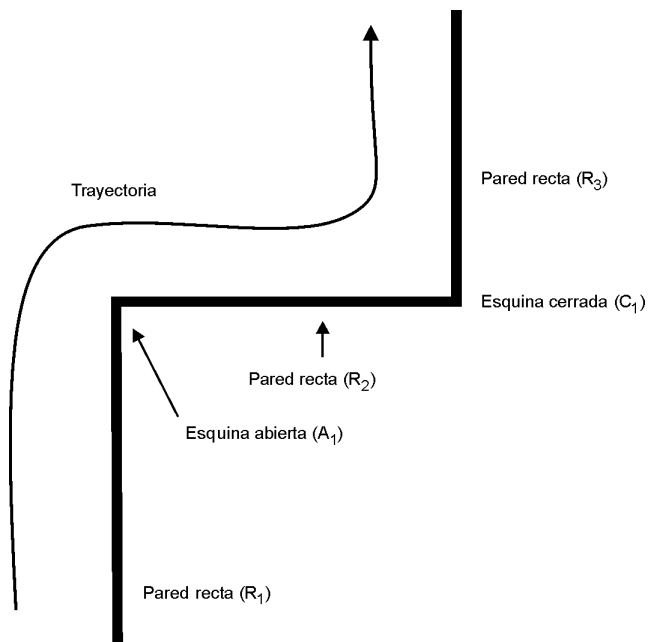
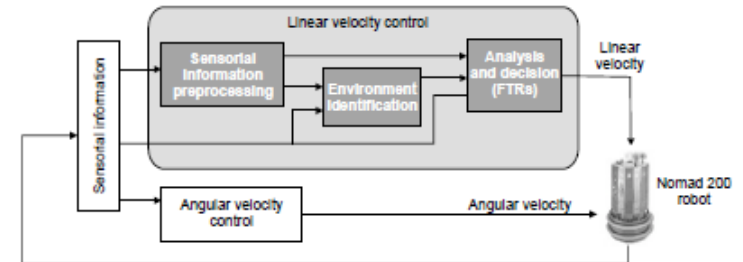
- Sistemas de control en robótica móvil
 - Localización incorrecta
 - Errores de posición
 - Incertidumbre en obstáculos (paredes, objetos móviles)



4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

— Sistemas de control en robótica móvil: comportamientos

- Seguir contorno
- Evitar obstáculo móvil
- Seguir guía



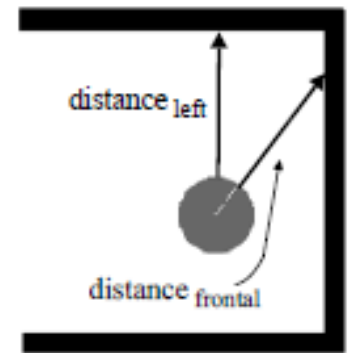
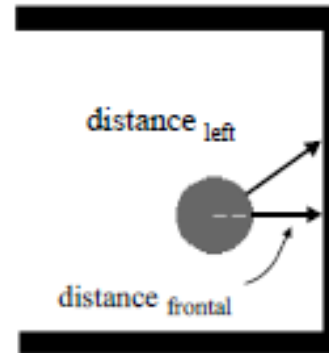
4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

- Un ejemplo de regla:

Si la distancia_frontal ES baja en parte de las últimas cuatro medidas
Y se está incrementando
Y el cociente de distancias ES bajo en parte de las últimas cuatro medidas
Y la velocidad ES baja

ENTONCES reducir algo la velocidad

$$\text{distances quotient} = \frac{\text{distance}_{\text{left}}}{\text{distance}_{\text{right}}}$$



Recorrido

cruce 1

cruce 2

4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

- Robot-guía URBANO (UPM)
 - [Localización](#) y [navegación](#): el problema técnico (balizas, ...)
 - Interacción con los usuarios: problema social/comunicativo:
 - [Sistema de habla, gestión de diálogos, expresiones.](#)
 - [Feria Indumática](#)
 - [Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia](#)
 - [Visita Web](#)
- Guiado automático de vehículos:
 - [Proyecto AUTOPIA \(Instituto de Automática Industrial, CSIC\)](#)
 - [Circuito cerrado](#)
 - [Evitación obstáculos](#)
 - [Frenazo](#)
 - [Circuito abierto](#)



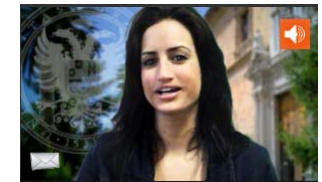
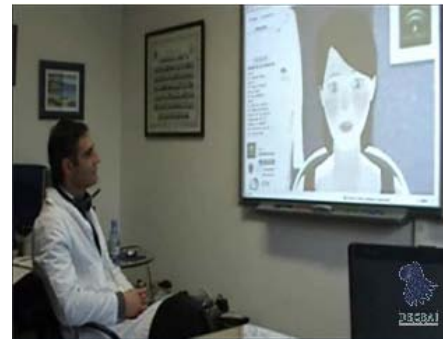
4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Asistentes virtuales: ¿superando el test de Turing? 😊

- Sistemas conversacionales orientados a un dominio específico (formación, información, ocio, ...)
- incluyen técnicas de
 - procesamiento del lenguaje natural
 - reconocimiento y síntesis de voz

Algunos ejemplos

- Paciente virtual (Univ. Granada)
 - Univ. Granada: ELVIRA
 - Soluciones virtuales
- Chatbots
 - Eliza
 - Anna: Recuperación de información en catálogo comercial
 - Shakespearebot
 - A.L.I.C.E.
 - AVS

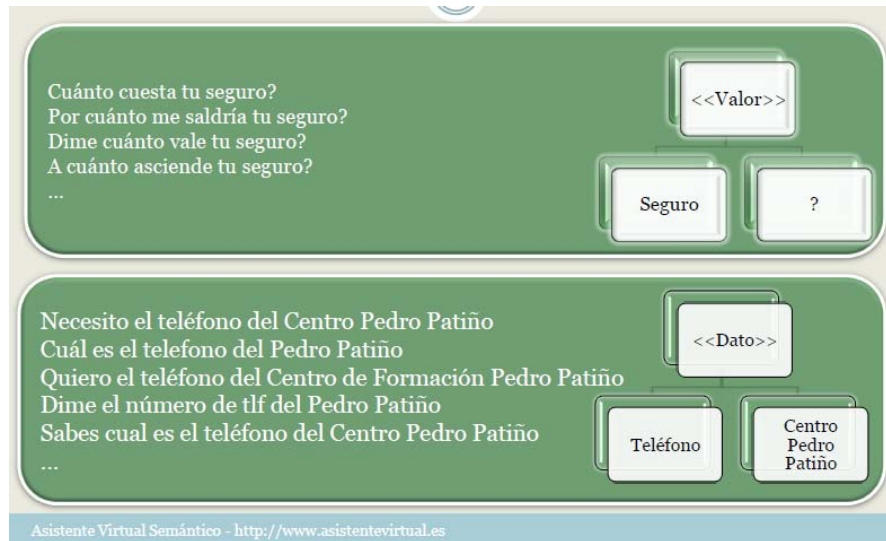


IA: Ciencia, tecnología, ficción ou marketing?

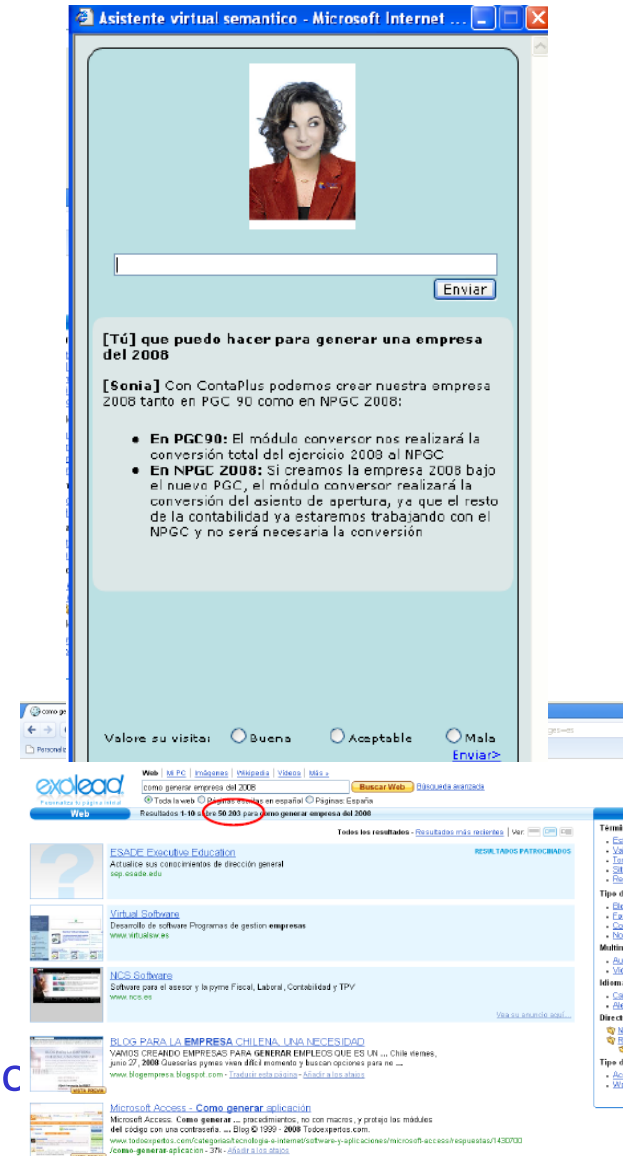
4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Asistentes virtuales: ¿superando el test de Turing? ☺

- Soluciona consultas
- Asistente (interfaz) + motor de búsqueda
- Búsqueda semántica
 - Interpretación de la consulta
 - Mapa conceptual (ontología)



- Respuesta directa o lista de documentos relacionados



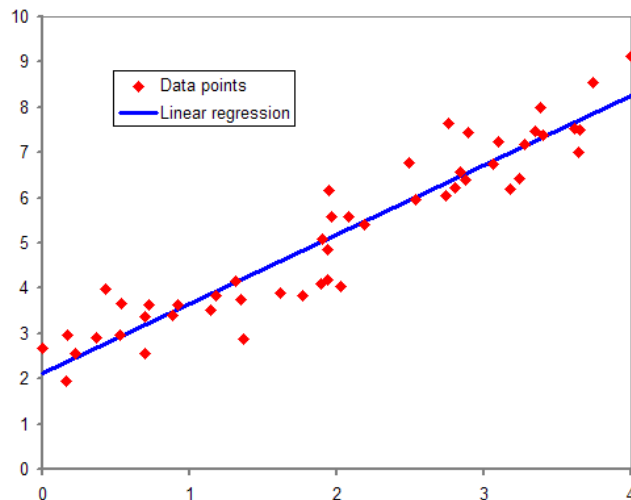
4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Predicción/Regresión: definición de reglas que formalizan el conocimiento sobre una estimación

- obtención: a partir de conocimiento experto o inducidas a partir de datos

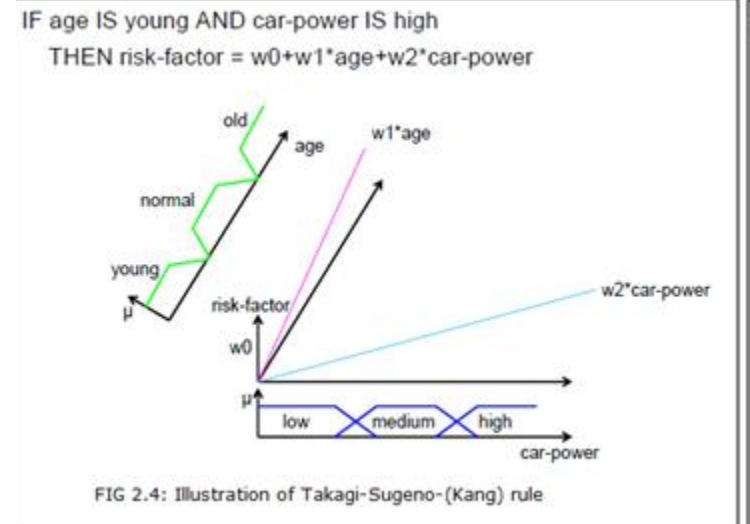
Ejemplos: regresión lineal

mínimos cuadrados



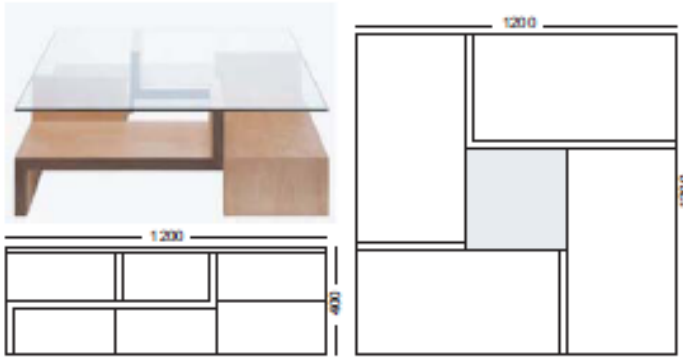
regresión reglas TSK

IF "X1 ES A1" Y ... Y "Xn ES An" THEN $Y=f(x_1, \dots, x_n)$

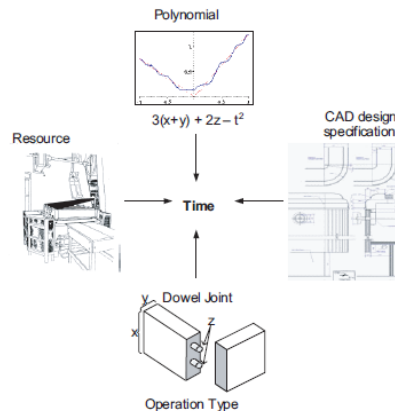


4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Caso práctico: industria del mueble (Martínez Otero)



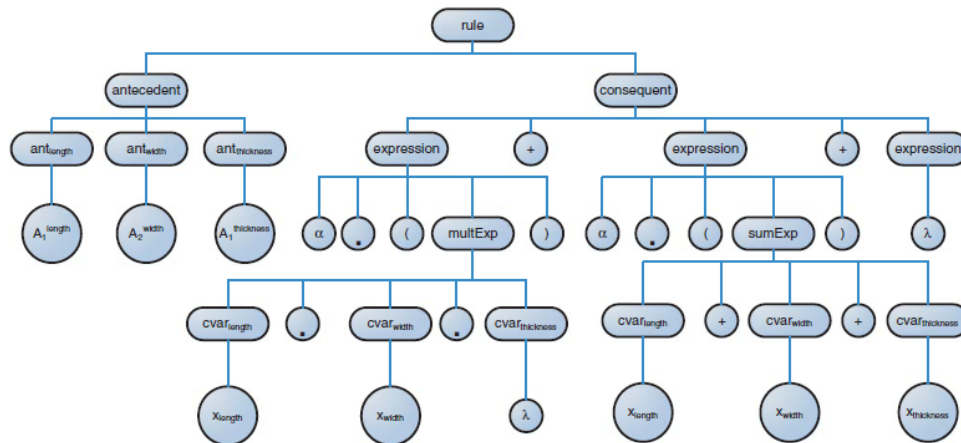
- Procesos:
 - Corte de tableros, lijado, ensamblado, encolado, montaje, embalado
 - Manipulación y preparación en todas las operaciones
- Interés:
 - Estimación de costes
 - Planificación de la producción



4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Caso práctico: industria del mueble (Martínez Otero)

1. If length is high and width is low and thickness is high then time is $120 \cdot \text{length} + 60 \cdot \text{width} + 180 \cdot (\text{length} \cdot \text{width} \cdot \text{thickness})$
2. If length is low then time is $120 \cdot \text{length} + 240 \cdot (\text{length} \cdot \text{width} \cdot \text{thickness})$
3. If width is low and thickness is low then time is $120 \cdot \text{length} + 60 \cdot \text{thickness} + 180 \cdot (\text{length} \cdot \text{width} \cdot \text{thickness})$
4. If width is low then time is $120 \cdot \text{length} + 240 \cdot (\text{length} \cdot \text{width} \cdot \text{thickness})$



$$R_k : \text{IF } X_1 \text{ is } A_{l_1}^1 \text{ and } \dots \text{ and } X_{na} \text{ is } A_{l_{na}}^{na} \\ \text{THEN } Y \text{ is } \sum_i \alpha_i \cdot f_i(x_1, \dots, x_{na})$$

$$f_i(x_1, \dots, x_{na}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{na} x_j \cdot \delta_{i,j} \\ \prod_{j=1}^{na} x_j^{\delta_{i,j}} \end{cases}$$

4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Descripción lingüística de datos: sumarios

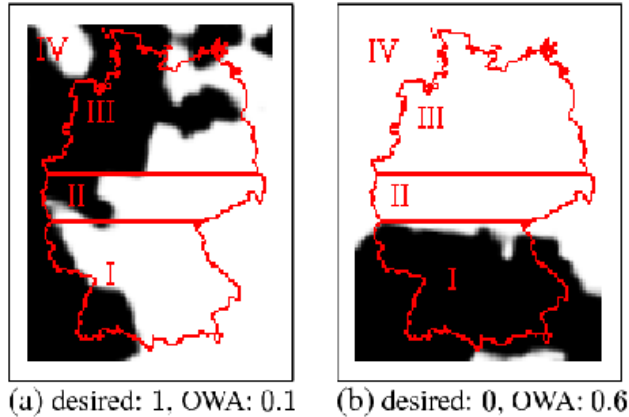
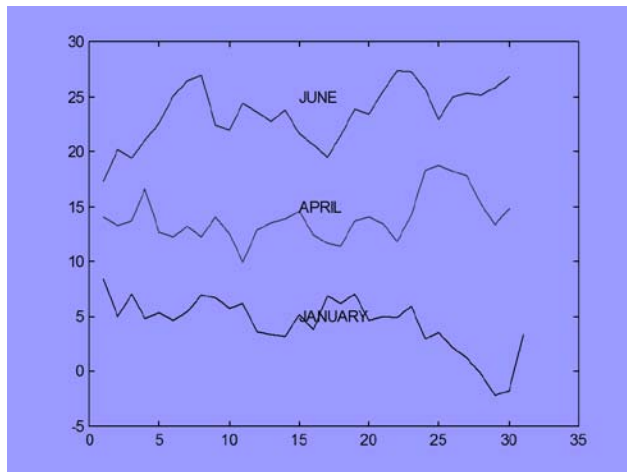


Figure 3: At least 60 percent of Southern Germany are cloudy



Algunas temperaturas de junio fueron bajas,
otras muy bajas

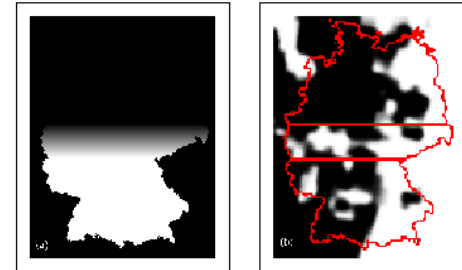
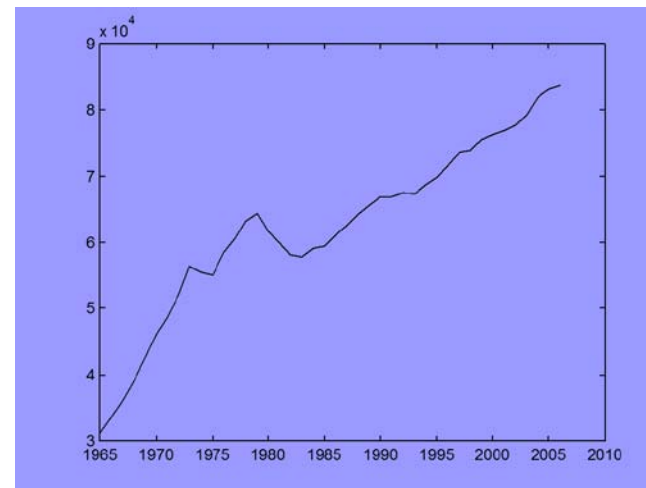


Figure 1: Images for ranking task. (a) A possible definition of $X_1 = \text{southern_germany}$; pixels with $\mu_{X_1}(e) = 1$ depicted white. (b) Fuzzy image region $X_2 = \text{cloudy}$; cloudiness depicted white. The contours of Germany, split in southern, intermediate and northern part, have been added to facilitate interpretation.



El incremento en la producción de petróleo
fue negativo o ligeramente positivo en los
últimos cinco años

4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Objetivo:

descripción (informes)

sistemas de soporte a la decisión (similar a otras reglas)

Caso: consumo doméstico de electricidad (Triviño, 2009)

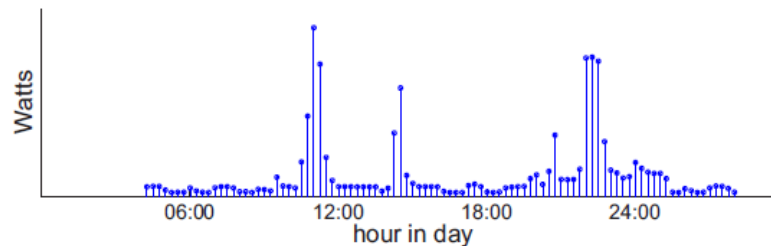


Figure 1. A 'day' of consumption from a household ($4 * 24 = 96$ data points). Typically households have low varying base consumption and short bursts of somewhat erratic high consumption.

4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Caso: consumo doméstico de electricidad (Triviño, 2009)

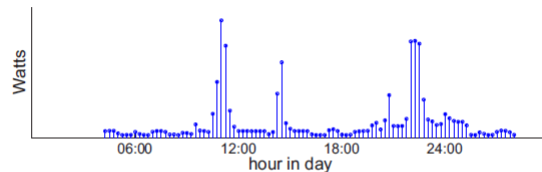


Figure 1. A 'day' of consumption from a household ($4 * 24 = 96$ data points). Typically households have low varying base consumption and short bursts of somewhat erratic high consumption.

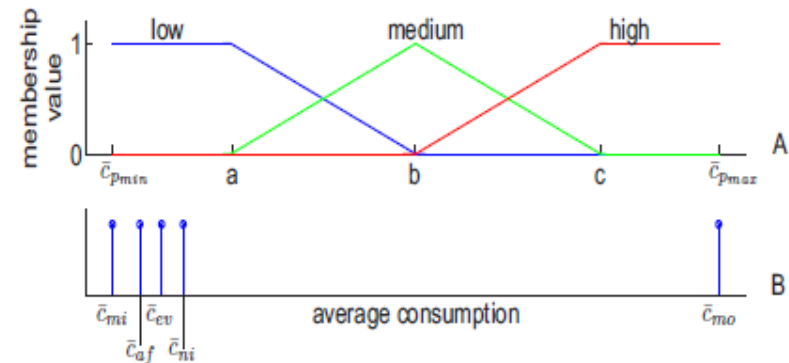
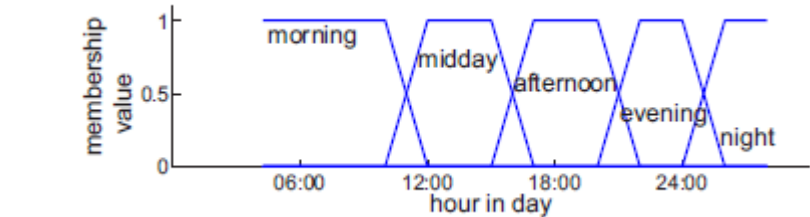
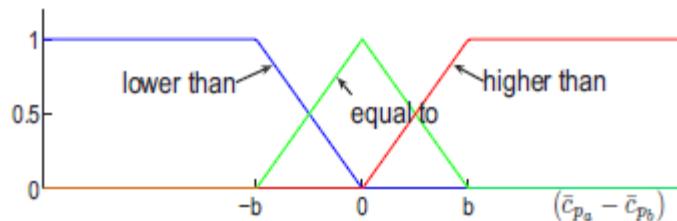


Figure 4. A: The membership functions for labels 'low', 'medium' and 'high' based on average consumption in parts of the day.

B: An example of labelling of for a particular day. The average consumption of 'midday' ($\bar{c}_{mi}$), 'afternoon' ($\bar{c}_{af}$), 'evening' ($\bar{c}_{ev}$), and 'night' ($\bar{c}_{ni}$) fall within the bounds of membership function low, and are consequently labeled as 'low consumption'. The 'morning' ($\bar{c}_{mo}$) is labeled as 'high'.

4. Aplicando el razonamiento ¿para que?

Caso: consumo doméstico de electricidad (Triviño, 2009)

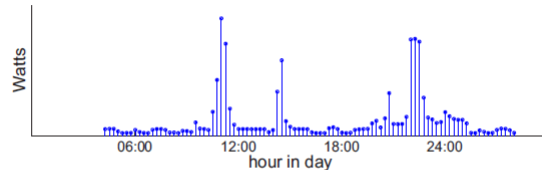


Figure 1. A 'day' of consumption from a household ($4 * 24 = 96$ data points). Typically households have low varying base consumption and short bursts of somewhat erratic high consumption.

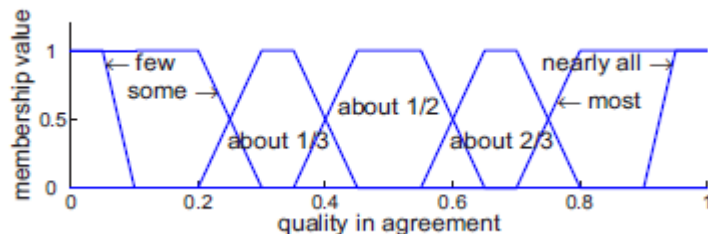


Table I

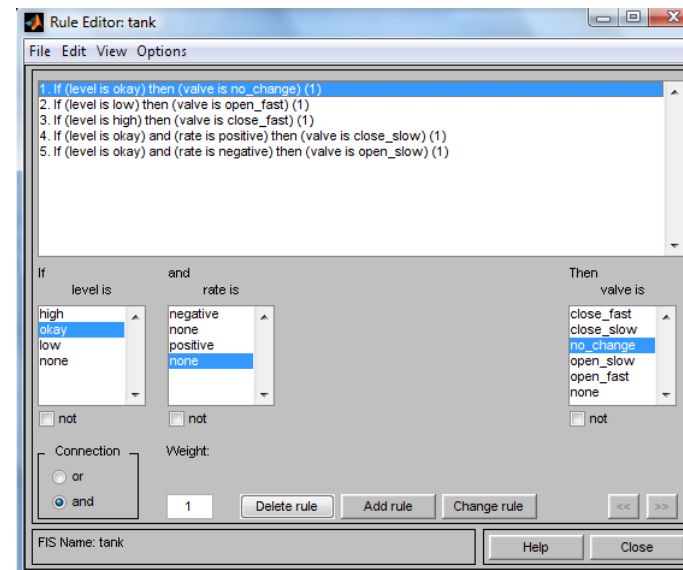
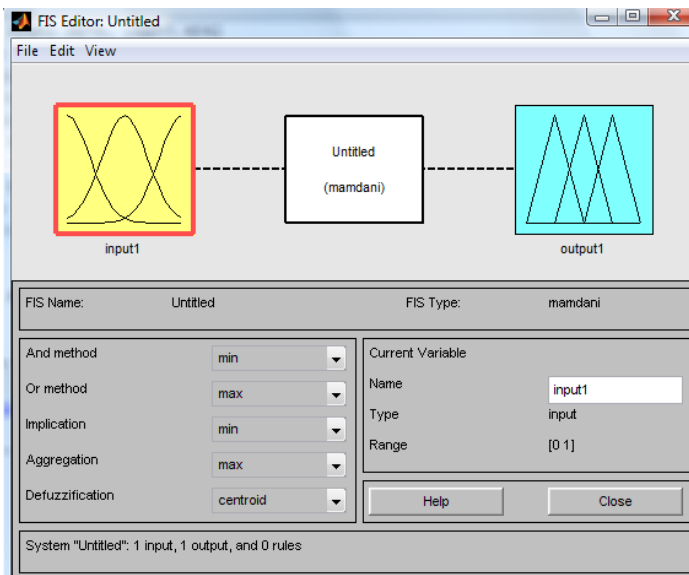
EXAMPLE OF OUTPUT SENTENCES FOR A PARTICULAR HOUSEHOLD, 5 SENTENCES OF TYPE ONE AND 2 OF TYPE TWO. LINGUISTIC LABELS ARE PRINTED IN SMALL-CAPS.

validity	relevance	sentence generated
0.831	1.000	ABOUT TWO THIRDS of the days the consumption in the MORNINGS is LOWER THAN the consumption in the AFTERNOONS.
0.920	0.567	MOST of the days the consumption in the MORNINGS is lower than the consumption in the EVENINGS.
0.999	1.000	ABOUT TWO THIRDS of the days the consumption in the MIDDAYS is LOWER THAN the consumption in the EVENINGS.
1.000	1.000	ABOUT TWO THIRDS of the days the consumption in the AFTERNOONS is LOWER THAN the consumption in the EVENINGS.
0.517	0.670	MOST of the days the consumption in the AFTERNOONS is HIGHER THAN the consumption in the NIGHTS.
1.000	1.000	ABOUT TWO THIRDS of the days your consumption is LOW during the MORNINGS.
0.819	1.000	MOST of the days your consumption is HIGH during the EVENINGS.

4. Aplicando el razonamiento ¿cómo?

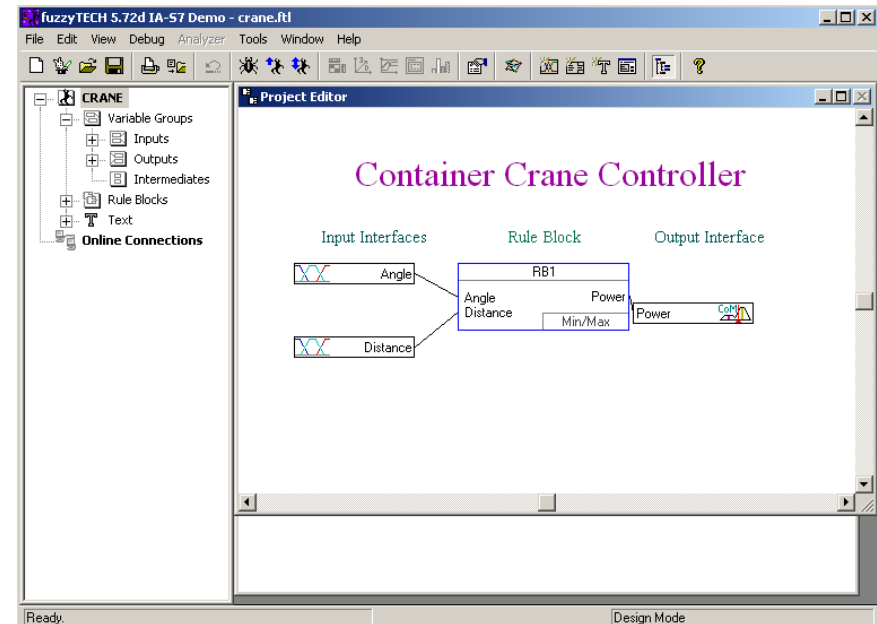
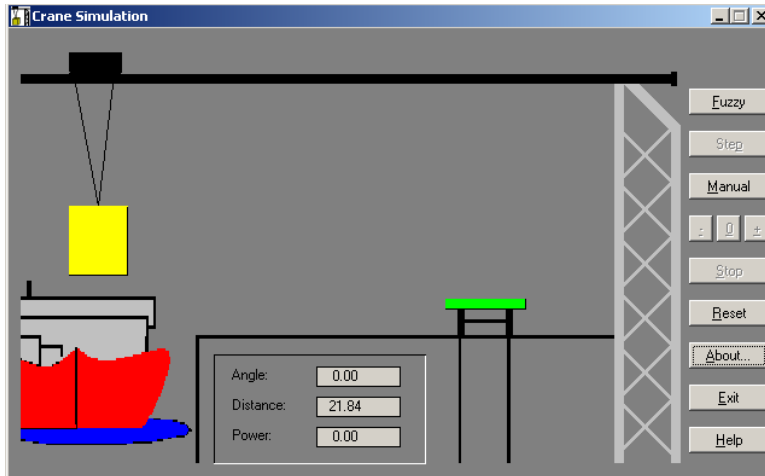
Software de diseño de Sistemas Basados en Reglas Borrosas:

- Matlab Fuzzy Logic Toolbox (The Mathworks) www.mathworks.com
- FuzzyTech (Inform) www.fuzzytech.com



4. Aplicando el razonamiento ¿cómo?

- FuzzyTech (Inform)



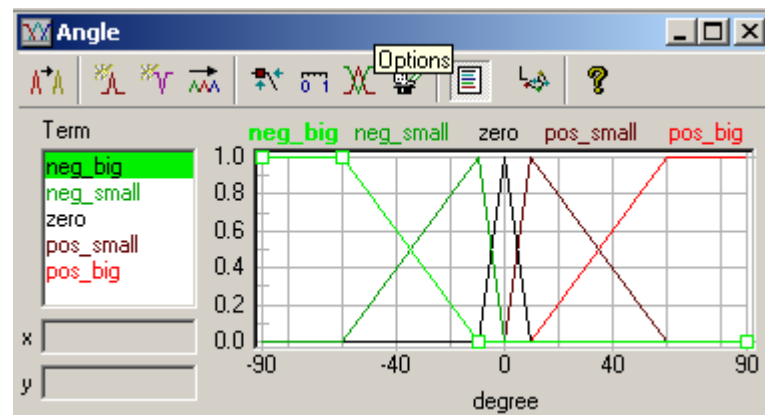
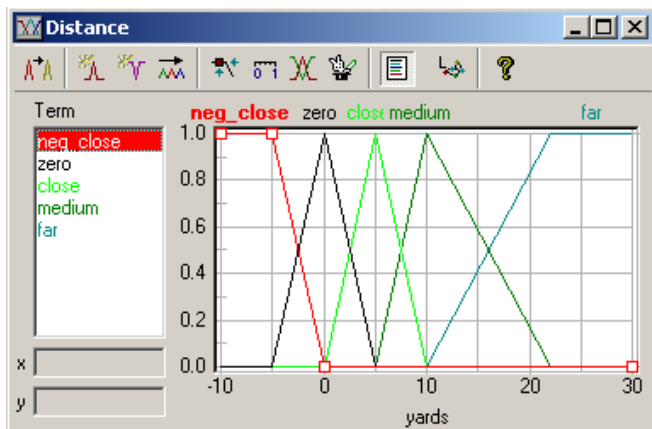
The analysis of the operator's actions reveals that the operator uses some rules-of-thumb to describe the control strategy:

- Start with medium power.
- When the container is far away from target, adjust the motor power so that the container gets a little behind the crane head.
- When the container is close to the target, reduce speed so the container gets a little ahead of the crane head.
- When the container is very close to target position, power up the motor.
- When the container is over the target and the sway is zero, stop the motor.

4. Aplicando el razonamiento ¿cómo?

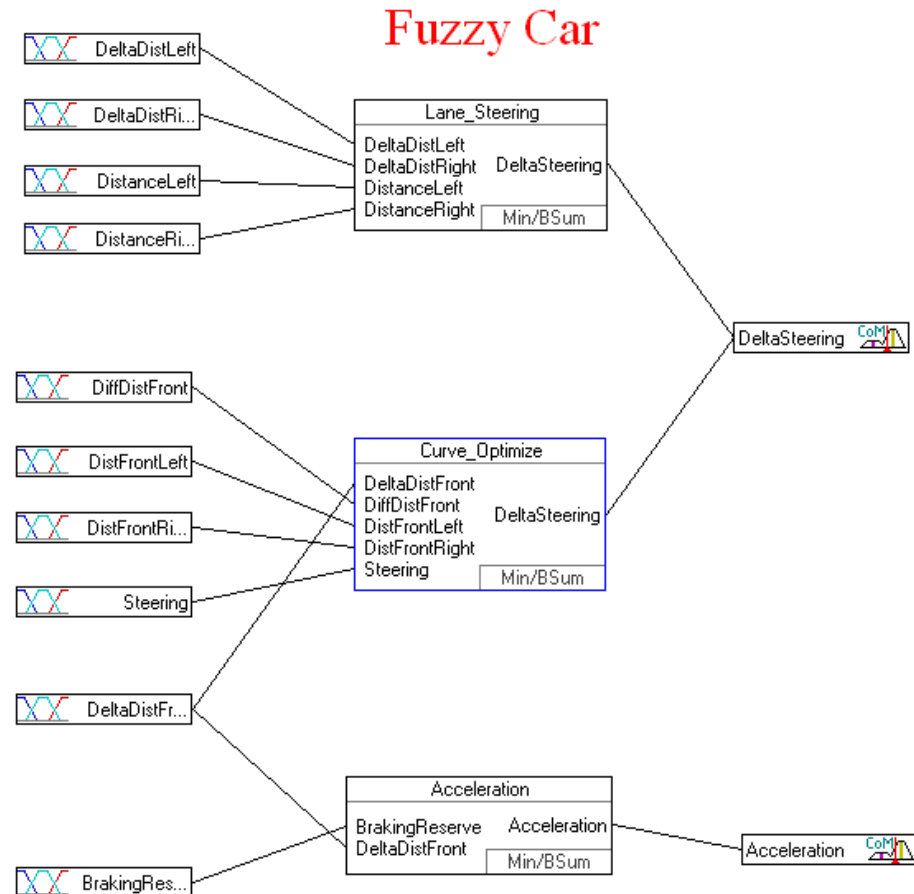
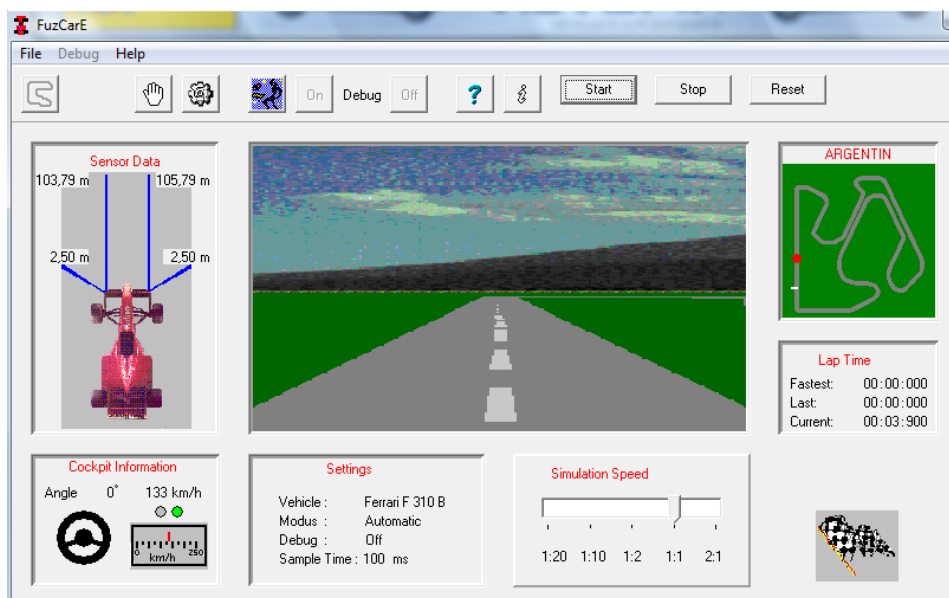
- FuzzyTech (Inform)

#	IF		THEN	
	Angle	Distance	DoS	Power
1	pos_small	zero	1.00	neg_medium
2	zero	zero	1.00	zero
3	pos_small	close	1.00	neg_medium
4	zero	close	1.00	zero
5	neg_small	close	1.00	pos_medium
6	neg_small	medium	1.00	pos_high
7	neg_big	medium	1.00	pos_medium
8	zero	far	1.00	pos_medium
9	neg_small	far	1.00	pos_high



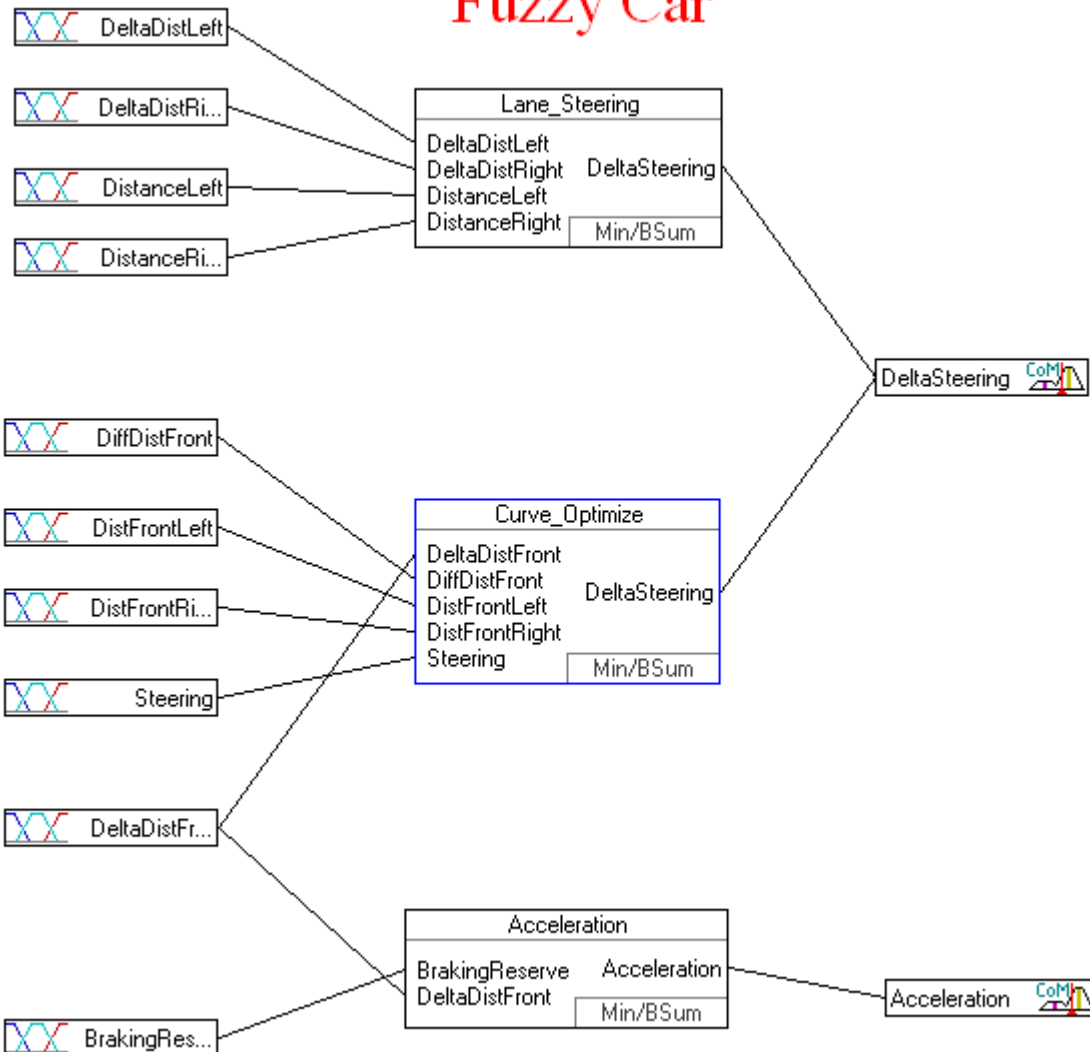
4. Aplicando el razonamiento ¿cómo?

- FuzzyTech (Inform)



4. Aplicando el razonamiento ¿cómo?

Fuzzy Car



IF				THEN	
DeltaDistLeft	DeltaDistRight	DistanceLeft	DistanceRight	DoS	DeltaSteering
further			zero	1.00	strong_left
	closer		very_close	0.40	strong_left
	closer	zero		0.60	strong_left
further	closer			0.10	left
constant			zero	0.40	left
	closer		close	0.50	left
further		very_close		0.40	left
constant	constant			0.10	constant
	further		very_close	0.40	right
closer	further			0.10	right
	constant	zero		0.40	right
closer		close		0.50	right
closer			zero	0.60	strong_right
	further	zero		1.00	strong_right
closer		very_close		0.40	strong_right

- Algunas referencias divulgativas:
 - A. Cerezo, “Aplicaciones de la lógica borrosa”. Automática e Instrumentación, 216, 113-119, 1991
 - Omron Electronics, “Clearly Fuzzy”, 1991.
- Algunas referencias básicas:
 - J.T. Palma, R. Marín. Inteligencia Artificial: técnicas, métodos y aplicaciones. Ed. McGraw-Hill, 2008. Capítulo 7 “Conjuntos borrosos”:
 - Curso introductorio de conjuntos y sistemas difusos. José Galindo, Univ. De Málaga. www.lcc.uma.es/~ppgg/FSS/
 - Matlab Fuzzy Logic Toolbox User’s guide.
 - J.M. Mendel. “Fuzzy logic systems for engineering: a tutorial”. Proceedings of the IEEE, 83, 3, 345-377, 1995.